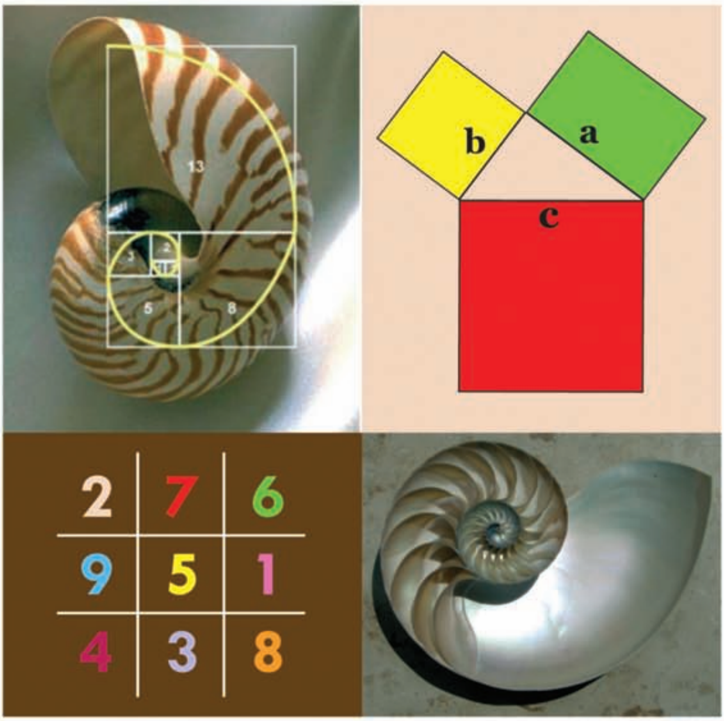
Clare Lee

El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas



Morata

Temas: Didáctica de las matemáticas
Métodos de enseñanza

El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas

La evaluación formativa en la práctica

Por

Clare LEE

Traducción de

Cristina Mimiaga Bretón

Clare LEE

El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas

La evaluación formativa en la práctica

Ediciones Morata, S. L.
Fundada por Javier Morata, Editor, en 1920
C/ Mejía Lequerica, 12 - 28004 - MADRID
morata@edmorata.es - www.edmorata.es

Título original de la obra:
Language for Learning Mathematics

Mejía Lequerica, 12. 28004 - Madrid
www.edmorata.es - morata@edmorata.es

ISBN: 978-84-7112-604-7
Depósito Legal: M-36.837-2009

Compuesto por: Sagrario Gallego Simón
Printed in Spain - Impreso en España
Imprime: Closas-Orcoyen, S. L. Paracuellos del Jarama (Madrid)
Diseño de la cubierta: Teorema de Pitágoras, cuadrado mágico más antiguo, espiral áurea y concha del nautilo, por Equipo Táramo

Contenido

Agradecimientos

Valoro y agradezco el trabajo de muchos profesores y colegas de Warwickshire que han colaborado conmigo para revelar y poner en práctica las ideas que contiene este libro. Gracias por vuestro tiempo y buena disposición para probar, argumentar y debatir nuevas ideas. Gracias por vuestro apoyo.

Así mismo doy las gracias a Bárbara, cuya confianza y sabiduría me ayudaron a desarrollar mi conocimiento y, por supuesto, a mi marido.

Cómo se desarrolla este libro

Este libro contiene siete capítulos organizados de tal modo que los conceptos se elaboren de un capítulo al siguiente. Sin embargo, cada persona querrá usar el libro para diferentes propósitos y, por consiguiente, unos capítulos pueden resultarle de más interés que otros. El libro sigue tres líneas argumentales diferentes: una perspectiva general del lenguaje y del aprendizaje de las matemáticas, la base teórica de los conceptos, y la implementación práctica de dichos conceptos.

Los Capítulos Primero y VII ofrecen una perspectiva general de las ideas principales. El Capítulo Primero hace una introducción al campo de aplicación del libro así como a los conceptos que se han desarrollado a través de una investigación aplicada. El Capítulo VII concluye con un resumen de los objetivos de los conceptos y de su significado, y las ideas clave para conseguir cambios cruciales durante la práctica profesional.

Los Capítulos II y VI exploran la base teórica. El Capítulo II investiga y explica en qué consiste el lenguaje matemá-

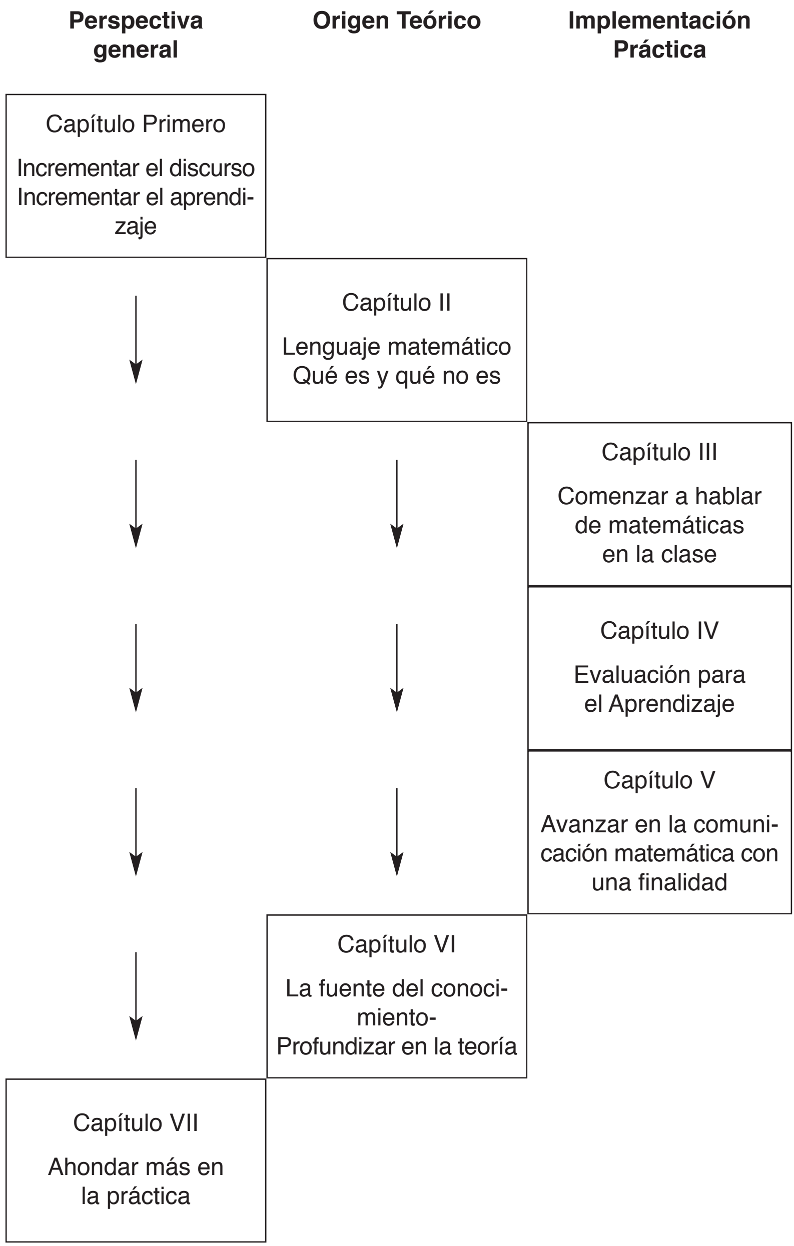
tico y expone lo que deben aprender los alumnos * al utilizar el lenguaje matemático para expresar sus ideas, y utilizar y controlar los conceptos matemáticos. El Capítulo VI examina en detalle el uso del lenguaje en el contexto literario y en el aprendizaje de las matemáticas. Explora tanto la base de las principales técnicas de lenguaje y comunicación para apoyar el aprendizaje y promover la Evaluación para el Aprendizaje **, como el efecto específico que esta propuesta puede tener sobre el aprendizaje de matemáticas de los alumnos. También explora los aspectos teóricos del cambio y cómo la investigación aplicada contribuye a desarrollar un conocimiento profesional.

Los Capítulos III, IV y V constituyen el núcleo del libro, y describen el modo de implementar los conceptos en las clases de matemáticas y cómo el enfoque sobre el lenguaje se enlaza con las ideas sobre el desarrollo de la Evaluación para el Aprendizaje. El capítulo III analiza lo más elemental para comenzar a concentrarse en el lenguaje durante la clase. El Capítulo IV trata de la Evaluación para el Aprendizaje y cómo se puede utilizar eficazmente su potencial para mejorar el aprendizaje en una clase en la que se aprende y se habla sobre matemáticas. El Capítulo V continúa con el enfoque práctico, y explora otras ideas para involucrar a los alumnos en la conversación y en el proceso de aprendizaje.

---

* Siempre deseamos evitar el sexismo verbal, pero también queremos alejarnos de la reiteración que supone llenar todo el libro de referencias a ambos sexos. Asípues, a veces se incluyen expresiones como "niños y niñas", "alumnos y alumnas" y otras veces se utiliza el masculino en general o algún genérico como profesorado y alumnado. *(N. del E.)*

** En inglés en estos últimos años la expresión con la que denominar lo que tradicionalmente venimos denominando *"evaluación formativa",* se está substituyendo por "Assessment for Learning" *(Evaluación para el Aprendizaje).* En esta obra emplearemos a partir de ahora esta última expresión. No obstante, en el subtítulo del libro mantenemos la denominación más conocida, "evaluación formativa", para no confundir a las personas interesadas en esta temática, pero no al tanto de esta modificación terminológica. *(N. del R.)*


Perspectiva general
Origen Teórico
Implementación Práctica
Capítulo Primero
Incrementar el discurso
Incrementar el aprendizaje
Capítulo II
Lenguaje matemático
Qué es y qué no es
Capítulo III
Comenzar a hablar de matemáticas en la clase
Capítulo IV
Evaluación para el Aprendizaje
Capítulo V
Avanzar en la comunicación matemática con una finalidad
Capítulo VI
La fuente del conocimiento-
Profundizar en la teoría
Capítulo VII
Ahondar más en la práctica

De forma ocasional introduzco citas en letra cursiva. Éstas proceden de las clases en las que he sido profesora u observadora, o de los profesores con quienes he trabajado. También hay comentarios que contienen breves descripciones de determinados alumnos y algunas pruebas que confirman que el incremento del discurso les ayudó a perfeccionar su conocimiento matemático.

CAPÍTULO PRIMERO

Incrementar el discurso, incrementar el aprendizaje

Este libro trata esencialmente de incrementar el discurso que tiene lugar en la clase de matemáticas. Existen muchas razones para pensar que es una idea recomendable, que explicaré más adelante. Sin embargo, la razón principal por la que el incremento del discurso es importante es porque aumenta el potencial de los alumnos para aprender matemáticas y el de los profesores para ayudarles a aprender. Cuando se incrementa el discurso con el que se desenvuelven los alumnos, el significado de las palabras y de los conceptos puede ser debatido y ampliado, de modo que tanto el profesor como el alumno pueden decidir sobre el mejor método para avanzar en el aprendizaje. Una vez que los alumnos se acostumbran a expresar sus ideas, la Evaluación para el Aprendizaje * se convierte en una parte arraigada de la práctica de la clase.

Utilizo la palabra "discurso" a menudo en este libro. Con ella me refiero a toda la gama del lenguaje que se pueda introducir en una clase. Para aprender matemáticas con eficacia los alumnos principalmente necesitan hablar de sus conceptos matemáticos, intercambiar impresiones sobre su

---

* Véase nota en página 14. *(N. del E.)*

significado, discutir conceptos y estrategias, y sentirse cómodos con el vocabulario matemático. Sin embargo, hablar es algo efímero y la disciplina de la escritura puede hacer que los pensamientos efímeros sean más permanentes y, por tanto, recordados con mayor facilidad a largo plazo. El término “discurso” también indica que los alumnos están involucrados en este proceso; son ellos quienes interaccionan y argumentan y transforman sus ideas momentáneas en textos permanentes. El profesor inicia y participa del discurso al tiempo que dirige un proceso que capacita a los alumnos a ser cada vez más competentes para continuarlo ellos mismos. Los alumnos participan en el discurso matemático, y durante el proceso aprenden a utilizar y dominar los conceptos matemáticos; se convierten en alumnos competentes de matemáticas.

Discurso y Evaluación para el Aprendizaje

Incrementar el discurso matemático aumentará el uso de la Evaluación para el Aprendizaje en la clase. Un aprendizaje efectivo junto con la Evaluación para el Aprendizaje —evaluación de formación continuada— están íntimamente relacionados, tal como se ha explicado en otras publicaciones (BLACK y cols., 2002, 2003). Si se incrementa el vocabulario matemático de los alumnos, entre otros muchos beneficios, se podrá sacar mayor provecho de la Evaluación para el Aprendizaje, el cual, por sí solo incrementa la evolución de los alumnos. Por tanto, este libro habla a favor de fomentar el uso del vocabulario matemático por parte de los alumnos, así como formas prácticas para ejercer la Evaluación para el Aprendizaje, ya que una cosa lleva a la otra. Al aumentar la capacidad de los estudiantes para utilizar el lenguaje matemático, tanto alumnos como profesores podrán explorar su comprensión de los conceptos matemáticos y, por consiguiente, ambos estarán mejor preparados para ampliar dicho entendimiento. Cuando se toman medidas

para ampliar la comprensión de conceptos, la exploración se convierte en una evaluación educativa y el aprendizaje se intensifica.

El lenguaje matemático: Una barrera a superar

Utilizar el lenguaje matemático puede ser una barrera para el aprendizaje de los alumnos debido a los requerimientos y convenciones específicas necesarias para expresar los conceptos matemáticos. Los alumnos necesitan expresar sus ideas matemáticas; los profesores no pueden esperar que lo hagan sin ayuda. Para muchos alumnos, aprender a expresar los conceptos matemáticos es similar a aprender a hablar una lengua extranjera. Los alumnos deben adquirir un vocabulario concreto, así como medios de expresión y frases que son específicamente matemáticas y que hacen posible explicar los conceptos matemáticos. Salvo que los alumnos sepan cómo utilizar el lenguaje en matemáticas, tenderán a pensar que no entienden un concepto en concreto cuando no pueden expresar una idea en este lenguaje. Sin embargo, cuando son capaces de expresar sus ideas matemáticas, advierten claramente que entienden y son capaces de aplicarlas. Los profesores incrementan la habilidad de sus alumnos para aprender matemáticas al ayudarles a expresar sus ideas mediante el lenguaje apropiado y al reconocer que necesitan utilizarlo de un modo diferente al lenguaje coloquial.

Incrementar el discurso matemático, incrementar el aprendizaje

Los alumnos que expresan sus propias ideas matemáticas adquieren muchas ventajas que se complementan con la Evaluación para el Aprendizaje. Una vez que articulan sus ideas son capaces de “dialogar” sobre un problema y adap-

tar la idea original a las nuevas circunstancias. Ser capaces de expresar conceptos matemáticos mientras aprenden les permite dominarlos y trasladarlos a otras situaciones. Pueden tener en consideración la posibilidad de aplicar estos conceptos, probar nuevas formas de utilizarlos, tomar decisiones equivocadas para después evaluarlas ellos mismos y explorar soluciones alternativas. La capacidad de expresar sus ideas proporciona a los alumnos la posibilidad de solventar con eficacia problemas de matemáticas y, por tanto, adquirir la destreza de afrontar nuevos retos. Dado que los alumnos pueden expresar sus ideas, también son capaces de dominar la forma de usarlas de un modo que no permite el aprendizaje tácito.

Cuando los alumnos expresan sus ideas, tanto ellos como su profesor adquieren mayor seguridad respecto a sus conocimientos. Los alumnos que son capaces de hablar de su formación matemática, pueden expresar las dudas que limitan su aprendizaje, ya que saben qué conceptos matemáticos utilizar y así expresar en qué áreas pueden mejorar dicho aprendizaje. De este modo, el profesor percibe lo que los alumnos realmente saben, resuelve dudas, y profundiza en las áreas en que lo necesitan. Cuando los alumnos han aprendido a utilizar el lenguaje matemático para expresar sus ideas, el profesor ya no tiene que “imaginarse” el nivel de aprendizaje del alumno, sino que puede tomar medidas más apropiadas para ampliar sus conocimientos. Los alumnos que se esfuerzan regularmente para expresar sus ideas y conocimientos, tienen mayor capacidad para resolver problemas que, por lo general, constituyen un reto para el grupo de su edad. Solventan los conceptos matemáticos con más confianza y por tanto están dispuestos a traspasar los límites que les plantean.

Incrementar el discurso en la clase implica que el significado de los términos se comparte entre los compañeros. Cuando se utilizan determinados términos en matemáticas a menudo éstos transmiten una compleja red de ideas. Consi-

deremos, por ejemplo, el término “rectángulo”, que indica una figura de dos dimensiones con cuatro ángulos rectos, cuatro lados y dos pares de líneas paralelas. A menudo se pide a los alumnos que consideren ideas acerca de la longitud relativa de los lados de un rectángulo o que las diagonales que cruzan en el centro de la figura no sean perpendiculares, etc. Un rectángulo es una figura muy simple, pero los alumnos toman conciencia de mayor número de conceptos asociados en la medida en que aprenden más sobre matemáticas. Por tanto, el término “rectángulo” les indicará una compleja red de ideas cada vez más extensa. Cuando se involucra a los alumnos en el diálogo y el debate, se comparte el significado de los términos. Con demasiada frecuencia los profesores se expresan en un lenguaje matemático específico que los estudiantes no usan. Si los alumnos no participan plenamente en el discurso no podrán “compartir” el significado y en su lugar lo habrán recibido, que es diferente. Con frecuencia los alumnos se resisten a utilizar términos matemáticos. Las expresiones matemáticas no forman parte de su lenguaje, sino de un lenguaje utilizado por una comunidad de personas de la que no se sienten parte y en la que no ven cómo participar. La labor del profesor de matemáticas es ayudar a sus alumnos a resolver esta dificultad. Cuando los docentes intervienen para apoyar a los alumnos a utilizar palabras esenciales y fraseología para expresar conceptos matemáticos los capacitan para tomar parte en el discurso de aprendizaje.

Beneficios de la implicación de los alumnos en el discurso matemático

Exponer conceptos matemáticos

Invitar a los alumnos a exponer hasta donde alcanza su comprensión de un concepto matemático les permite ser conscientes de sus conocimientos y de esta manera des-

arrollarlos y reorganizarlos. Expresar sus ideas les ayuda a recordar con qué han trabajado, y les permite utilizar y dominar los conocimientos que han adquirido. Aprenden conceptos matemáticos y cuando expresan sus ideas se consideran capaces de resolver problemas matemáticos.

Estar implicados en el discurso matemático equivale a asignar un significado a las palabras y frases que se comparten en el grupo. Si todos los compañeros de la clase participan en el discurso, todos comparten las definiciones que se generan. Participar plenamente en el discurso significa que los alumnos expresan sus propias ideas, además de escuchar y reflexionar sobre los conceptos expresados por otros. El profesor también comparte estas definiciones y, por tanto, tiene acceso a la comprensión y a la incomprensión de sus alumnos. El profesor puede entonces modificar las actividades de la clase para que éstas se adapten a las necesidades de aprendizaje actuales de los alumnos; es decir, podrán ejercitar una evaluación educativa.

Reto

Cuando los alumnos toman parte de un discurso matemático pueden realizar trabajos más difíciles y les permite entender y tener confianza en lo que hacen. Saben cuándo han comprendido bien los conceptos y están preparados para utilizar esas ideas para solucionar problemas que suponen un reto para ellos. Para aumentar el rendimiento de los alumnos en matemáticas, el nivel de desafío en el trabajo que se les pide debe ser lo más elevado posible, pero sin que por ello pierdan la esperanza de ser capaces de aprender. Al implicar a los alumnos en el discurso matemático, el profesor debe estar seguro de que el nivel de desafío es el más elevado posible y que los alumnos sepan que están aprendiendo eficazmente.

Involucrar a los alumnos en el proceso de aprendizaje

El discurso permite a los alumnos estar involucrados en el proceso de aprendizaje. Éste es un factor primordial en la aplicación de la Evaluación para el Aprendizaje. Cuando se sienten involucrados en el proceso de aprendizaje son más responsables y eficaces, y a la larga tienen mayor éxito. Sin embargo, para estar involucrados en el proceso de aprendizaje de matemáticas, deberán ser capaces de expresar sus ideas así como de debatir y dialogar entre ellos; es decir, deberán ser capaces de utilizar el lenguaje matemático.

Parte de la implicación en el proceso de aprendizaje consiste en que los alumnos asumen la responsabilidad del resultado de dicho proceso y entonces ven al profesor como un recurso para apoyar su aprendizaje y no como la única persona que sabe lo que hay que hacer. El discurso en la clase se puede desarrollar en torno al contenido que han de aprender los alumnos y en especial sobre la forma más eficaz de aprenderlo. Cuando los alumnos participan plenamente en los debates, influyendo en el curso que éstos toman al mismo tiempo que les afecta a ellos, trascienden el mismo al ser capaces de utilizar las ideas argumentadas.

Los alumnos también se involucran en el proceso de aprendizaje cuando se les ofrece elegir, y se les permite e incentiva para tomar decisiones sobre el trabajo que hacen y el modo en que lo realizan. Los alumnos agradecen poder tomar sus propias decisiones para continuar su aprendizaje aunque les lleva algún tiempo acostumbrarse. Los alumnos también se implican en el proceso de aprendizaje al formar parte del proceso de enseñanza. Cuando se ayudan mutuamente para aprender conceptos matemáticos, adoptan de forma natural la identidad de alguien que conoce la materia.

La implicación de los alumnos en el proceso de aprendizaje significa que constituyen una parte esencial de un discurso que desarrolla su conocimiento; forman parte de una

comunidad que usa un discurso elocuente. Pueden adoptar una postura meta-cognitiva al tomar conciencia de su propio aprendizaje y al empezar a aceptar la responsabilidad de la misma.

Comunidades fuera del aula

Es obvio que la comunidad más amplia de la escuela tiene un gran efecto sobre lo que ocurre dentro del aula. Los efectos pueden ser manifiestos —por ejemplo, las normas de los alumnos que se sientan en filas y no hablan durante la clase— o sutiles, tales como las expectativas de los alumnos tanto de su comportamiento como el de los profesores respecto a un tema. Normalmente los alumnos esperan no ser involucrados en una lección, y que todo esté ya organizado y la enseñanza se adapte a ellos. Pedirles que piensen y expresen sus ideas puede ser conflictivo. Sería de gran ayuda si toda la escuela cambiara su planteamiento y decidiera fomentar el uso del lenguaje y favorecer el pensamiento y la reflexión como parte de un proceso para incrementar la cultura en la escuela. Sin embargo, la falta de un enfoque que integre a toda la escuela no es una razón para descartar estas cuestiones. Conozco muchas clases de matemáticas en las que los alumnos expresan y justifican sus ideas, y generan definiciones independientemente de lo que ocurre en otras asignaturas.

En ocasiones toda la sociedad parece conspirar en contra de una clase de matemáticas en la que se habla y se aprende. Los alumnos acuden a las clases con la idea de que existe una forma correcta de resolver cualquier problema de matemáticas y una respuesta correcta a cada problema. A menudo se resisten a aportar otras ideas alternativas cuando ya se ha expresado una. Esto es comprensible, porque desde su punto de vista, todas las respuestas excepto una son incorrectas. Con el tiempo se pueden superar estas percep-

ciones con los diferentes planteamientos presentados en los capítulos siguientes. Con frecuencia los alumnos están demasiado preocupados por no cometer errores y a veces prefieren no intervenir en absoluto por miedo a expresar una idea errónea. Estas percepciones hacen que no participen plenamente en el discurso. Tienen resistencia a debatir o aportar ideas en un debate porque les preocupa cometer un error o dar una respuesta equivocada.

La Evaluación para el Aprendizaje contribuye sobremanera a superar este enorme obstáculo en el aprendizaje de las matemáticas. En primer lugar, establecer los objetivos de aprendizaje de la lección clarifica qué y cómo ha de aprender el alumnado. La autoevaluación y la observación ayudan a identificar todas las sombras y matices que favorecen un resultado de alta calidad durante el proceso de aprendizaje. Los estudiantes pueden utilizar este proceso para tener la certeza absoluta de que lo están haciendo bien, aun cuando su trabajo sea diferente al de sus compañeros. Estos planteamientos les ayudan a adquirir seguridad en su habilidad para conocer el resultado requerido de su trabajo y para saber que están en buen camino.

Muchos alumnos asisten a clase con la idea de que tienen un nivel de capacidad fijo y predeterminado, y casi siempre les preocupa que éste sea bajo. Se trata de una "entidad de teoría de aprendizaje" (DWECK, 2000) y es prevalente en gran parte de la sociedad. La idea de que los alumnos tienen un nivel concreto de destreza en matemáticas puede haber sido reforzado, entre otros motivos, por los procedimientos de "clasificación" o "agrupación" en la enseñanza. Los planteamientos que defiendo se basan en la idea de que todo el mundo puede estar mejor capacitado para las matemáticas al afrontar las dificultades específicas del aprendizaje (la teoría incremental del aprendizaje). Esto supone un concepto nuevo para los estudiantes. Si un alumno en el pasado ha intentado aprender matemáticas en repetidas ocasiones y después ha fracasado, no es de extrañar que desista en el

intento. En estas circunstancias la elección para los alumnos parece estar entre aparentar ser vagos y no intentarlo, o intentarlo y dar la impresión de que son estúpidos. A fin de cuentas parece lógico que prefieren que se piense de ellos que son vagos a que sean estúpidos. Es importante hacer hincapié en enseñar desde el punto de vista del aprendizaje progresivo; todo el mundo puede mejorar con perseverancia, ayuda y apoyo.

Establecer conexiones en matemáticas

Incrementar el discurso en la clase tiene el potencial de ayudar a los alumnos a establecer conexiones entre las diferentes áreas de aprendizaje de matemáticas. Existe una tendencia general a enseñar de un modo segmentado. Las lecciones se planifican bajo títulos: fracciones, teoría de Pitágoras, probabilidades, el “Proyecto Pelota de Golf”, y así sucesivamente. Los alumnos consideran cada conjunto de temas muy diferentes de los demás, salvo que su profesor tome medidas para ayudarles a apreciar los vínculos y conexiones que existen entre ellos. Las matemáticas constituyen una serie de conceptos interconectados; todas las áreas matemáticas —álgebra, geometría, trigonometría, etcétera— forman parte de un todo que constituye un sistema evolutivo, así como un modo de pensar y comunicar ideas. Los alumnos contribuyen al sistema cuando lo generalizan o formalizan, y cuando buscan patrones o coherencia. Yo alegaría que estas destrezas genéricas —generalizar, buscar patrones, etcétera—, a la larga son más importantes para los alumnos que, por poner un ejemplo, ser capaces de recitar el teorema de Pitágoras, aunque esto también sea útil. La noción de matemáticas que suelen tener los alumnos se basa en una serie de patrones y diagramas. Tan sólo aprecian el lenguaje simbólico, las explicaciones, los razonamientos y justificaciones como parte de las matemáticas si es muy

explícito. Desarrollar la habilidad de los alumnos para participar en el discurso matemático les permite apreciar los vínculos y conexiones en el sistema matemático. Los alumnos empiezan a considerar las matemáticas como una forma de explicar, razonar, y evidenciar, y a entender que el lenguaje matemático, incluyendo los aspectos no verbales, ha sido creado para hacer esto con eficacia.

Tender un puente entre los discursos

Los alumnos necesitan hacer conexiones, puentes o trazar caminos entre su discurso informal y el registro matemático; tienen bastante rechazo a usar el vocabulario y las frases matemáticas. Las clases que utilizan planteamientos puente, tales como refinar los intentos de los estudiantes de crear una definición matemática en lugar de imponer una definición "correcta", les permite ser más adeptos y confiados al utilizar el lenguaje matemático. Puesto que los alumnos llegan a adquirir más vocabulario y se les requiere expresar sus conceptos matemáticos más a menudo, también empiezan a corregirse unos a otros utilizando el registro matemático. Es decir, empiezan a establecer un vínculo entre el lenguaje matemático y sus formas personales para expresar ideas.

Es importante explorar el modo en que el registro matemático se adapta y difiere del lenguaje que usan los alumnos a diario, de lo contrario éstos se sentirán confusos y distanciados de los conceptos matemáticos. A algunos les resulta difícil expresar conceptos matemáticos y les preocupa que sus compañeros se rían de ellos cuando lo intenten. Sin embargo, es importante que la pauta en la clase sea la de reconocer las dificultades del alumno y ofrecer apoyo y reconocimiento.

Al utilizar el lenguaje matemático para explicar sus ideas, muchos alumnos tienen que emplear un discurso con el que

aún no están cómodos. No es de extrañar que se sientan inseguros y expuestos al ridículo cuando intentan actuar como si supieran matemáticas, ya que ni ellos mismos lo consideran así. No obstante, expresar y explicar conceptos les ayuda a aprender y a sentir que los conocen. Se hacen dueños de sus ideas y son capaces de dominarlas y utilizarlas. Esto podría equipararse fácilmente a la situación del huevo y la gallina: sin embargo, cuando los profesores, de manera lenta y cuidadosa fomentan la habilidad de los alumnos para participar en el discurso matemático, les ayudan a ser capaces de expresar y sentirse seguros de su habilidad para poner en práctica sus conceptos matemáticos.

Investigación-Acción

La parte principal de este libro trata de cómo pueden proceder los profesores en clase para fomentar la habilidad de sus alumnos para utilizar el lenguaje matemático de manera que puedan aprender eficazmente. Sin embargo, en primer lugar explico por qué tengo la certeza de que estas ideas funcionan y recomiendo una forma de proceder que permitirá al profesorado que quiera desarrollar su práctica seguir la pista de los cambios que tienen lugar en su clase y consideren la forma más idónea de hacer mejoras en el futuro.

Cuando empecé a desarrollar los conceptos contenidos en este libro, yo era profesora de matemáticas en un instituto de enseñanza secundaria de un barrio deprimido de la ciudad. La finalización del trabajo de investigación (LEE, 2004) que respalda la mayor parte de este libro, trajo consigo un cambio en mi carrera que me permitió acceder a las clases de otros profesores. En la medida en que desarrollaba la práctica que reflejaba mis ideas originales, yo aprendía más sobre el verdadero sentido de poner dichas ideas. Comencé

a observar que los pensamientos, que en un principio eran fundamentales para incrementar el discurso en mi clase, también tenían el poder para mejorar el aprendizaje porque se vinculaban y se entremezclaban con la Evaluación para el Aprendizaje. Una vez que los alumnos expresaban lo que realmente sabían y lo que eran capaces de hacer y de entender, ambos podíamos tomar medidas para incrementar su aprendizaje; ya no era necesario intentar adivinar lo que podía ayudarles, ellos mismos me lo podían decir. Las ideas que se desarrollaron en mi clase a pequeña escala fueron probadas, demostradas y ampliadas por otros muchos profesionales capacitados con los que tuve la suerte de trabajar.

Utilicé la teoría detallada en el Capítulo VI con la intención de mejorar la capacidad de mis alumnos para poner en práctica sus conceptos matemáticos.

> Podemos definir la investigación-acción como *el estudio de una situación social para tratar de mejorar la calidad de la acción en la misma.* Su objetivo consiste en proporcionar elementos que sirvan para facilitar el juicio práctico en situaciones concretas y la validez de las teorías e hipótesis que genera no depende tanto de pruebas "científicas" de verdad, sino de su utilidad para ayudar a las personas a actuar de modo más inteligente y acertado.
>
> (ELLIOT, 1991, pág. 69, en trad. cast. pág. 89, en cursiva en el original.)

Mi intención era proceder de un modo más "inteligente y competente" en mi clase y sabía que debía mejorar la calidad del aprendizaje que tenía lugar en aquel momento. Era consciente de que otros autores tenían en cuenta que incrementar el discurso en matemáticas incrementaría el aprendizaje que los alumnos eran capaces de asimilar. Me preguntaba ¿cómo podría aumentar el discurso en mi clase? Hice intentos y algunas veces fracasé. Los alumnos estaban confusos e irritados por lo que les pedía que hicieran. Pero casi siempre tuve éxito y poco a poco, tanto mis alumnos como yo, nos fuimos acostumbrando a lo que funcionaba y a lo que no.

Aprendí, por ensayo y error, a ayudar a los alumnos a expresar sus propios conceptos matemáticos y observé que ellos sabían que progresaban más de esta forma.

Completé tres ciclos de investigación aplicada para investigar el mejor modo de implementar una práctica que respondiera a las ideas que había adquirido a través de mis lecturas. Es decir, planifiqué cómo actuar en la clase utilizando la teoría que había desarrollado hasta ese momento, puse en práctica esos planes y revisé los resultados. La implementación y revisión de los elementos de los ciclos de investigación-acción tuvo tres resultados.

1. una comprensión más profunda de las diversas teorías que estaba estudiando,
2. la necesidad de explorar la literatura sobre el tema para averiguar más sobre ciertos aspectos que observaba,
3. una expansión o rearticulación de las teorías existentes para que reflejaran mejor las realidades de la clase.

A lo largo de los tres ciclos cambié y desarrollé mi enfoque teórico. Utilicé el análisis de los datos para empezar a expresar las posibilidades y problemas que planteaba utilizar el lenguaje en la clase de matemáticas y hacerlo público. El hecho de ser profesora durante la fase de recopilación de datos fue vital para el proyecto y dio ímpetu a los resultados. Estaba en posición de crear y revisar los datos con una visión profunda debido a mi estrecha implicación. Mi implicación en el “sucio mundo real de la práctica” (GRIFFITHS, 190, pág. 43) significaba que a veces era difícil recopilar los datos que necesitaba, pero también me daba ímpetu y fuerza para definir los resultados. Realmente quería conocer el resultado final de mi investigación ya que quería ejercer mi profesión de la mejor manera posible.

El proyecto de investigación

Era consciente de que quería cambiar mi método y tenía ideas de cómo podría hacerlo; sin embargo, sabía que aunque con el tiempo querría utilizar las ideas que exploraba en mis clases no podría cambiar todo a la vez. Escogí una clase en la que me iba bien, una clase de grado 9* (entre 13 y 14 años), con un buen nivel de destreza, pese a que ninguno de los alumnos se consideraba "bueno" en matemáticas. Sabía que si las ideas se trabajaban en esta clase lo más probable es que funcionaran para la mayor parte del alumnado. También advertí que estos alumnos podían conseguir mejores resultados en matemáticas al ofrecerles mejores experiencias durante su aprendizaje.

Recopilé datos en la medida en que avanzaba en los ciclos de investigación-acción. Mi fuente de información principal eran las anotaciones que conservaba en un diario. Escribí en él todo lo posible después de cada lección durante los dos cursos escolares en que investigué mi práctica con esta clase. En este diario no sólo apuntaba la planificación de las clases, sino que cavilaba sobre las respuestas de los alumnos a los planes y lo que pensaba acerca de los progresos de mi objetivo para incrementar el discurso. También utilizaba los cuadernos de los alumnos como referencia y registraba notas de algunas clases para poder revisarlas más tarde. Al final del año dirigía entrevistas informales con grupos de alumnos, en las que les preguntaba sobre sus puntos de vista sobre la forma en que habíamos interactuado en la clase.

Es difícil recopilar datos mientras estás enseñando; hay muy poco tiempo. Sin embargo, me discipliné para llevar un registro y adopté tácticas que encajaran con el resto de mi trabajo. Me aseguré de que los ciclos de la investigación-acción se adaptaran al período escolar, utilizando los descansos para reflexionar, revisar y planificar de nuevo el siguiente ciclo.

---

* Equivalente en España a 3.º de ESO. *(N. del T.)*

El resultado de los ciclos de Investigación-Acción

El resultado del proceso fue una apreciación más certera de por qué los alumnos necesitaban expresar sus conceptos matemáticos y de las barreras que se lo impedían. Desarrollé una serie de prácticas para capacitar a los alumnos y alumnas a desarrollar su habilidad para expresar sus pensamientos matemáticos. También descubrí que su aprendizaje mejoraba cuando empezaban a implicarse en un diálogo en la clase, y tanto ellos como yo podíamos saber en qué fase se encontraba su comprensión y estar seguros de que eran capaces de incrementar dicha comprensión.

La investigación-acción es una herramienta poderosa para desarrollar la práctica profesional del profesorado. La disciplina de advertir (MASON, 2002) lo que está ocurriendo en una clase y reflexionar sobre si funciona lo mejor que puede, mejora la calidad de la enseñanza de un profesor y su habilidad para compartirlo con los demás. La investigación-acción exige que los profesores piensen en su propio ejercicio y conecten con las ideas de otros autores y colegas sobre lo que constituye una buena práctica mientras intentan mejorar la calidad de sus propios métodos. La investigación-acción es un medio por el que se puede aplicar la teoría académica en una clase.

CAPÍTULO II

Lenguaje matemático: Qué es y qué no es

> *Una parte del aprendizaje para aprender a hablar como un matemático, es ser capaz de utilizar el lenguaje tanto para recordar y controlar las imágenes matemáticas personales, como de transmitirlas a los demás.*
>
> (PIMM, 1995, pág. 40.)

En este capítulo profundizaré en lo que es en realidad el lenguaje matemático y en lo que los alumnos necesitan aprender para poder hablar de sus conceptos matemáticos. Cuestiono el estilo matemático convencional y cómo éste puede ocasionar inconvenientes al alumnado que esté aprendiendo matemáticas, e investigo cuáles son los conceptos esenciales que deben adquirir para expresar sus ideas matemáticas y poder entablar diálogo con los demás en el discurso matemático.

La investigación sobre el discurso matemático y la lectura de los textos matemáticos concluye que el lenguaje en el que se expresan los conceptos matemáticos, lejos de ayudar a los alumnos, en realidad constituye una barrera a su aprendizaje (PIMM, 1987; LABORDE, 1990; ERVYNCK, 1992). El hecho es que gran parte del discurso matemático que nuestros

alumnos experimentan se expresa en un estilo convencional. Si los alumnos tienen que involucrarse plenamente en el discurso matemático tanto dentro como fuera del aula, deben comprender los convencionalismos del lenguaje matemático y los profesores deben ayudarles en el proceso.

El modo en que se expresan las matemáticas en los libros de texto, al igual que por parte de muchos profesores, no corresponde con los hábitos lingüísticos normales del alumnado. En el aula es más normal oír decir a los alumnos "cuentas tantas veces el largo por el ancho y te da el área", que la forma matemática más pasiva y convencional "el área de un rectángulo es igual a la longitud multiplicada por la anchura". Aunque ambas frases expresan el mismo concepto, la segunda se considera convencionalmente más matemática, ya que se expresa en un estilo conciso, impersonal e inmutable. Existe una compleja interacción entre los aspectos lingüísticos, conceptuales y sociales del aprendizaje de un alumno (LABORDE, 1990). Por tanto, las dificultades que surgen debido al lenguaje en el que se expresan las matemáticas, afecta de manera adversa a la conceptualización de las nociones matemáticas del alumno.

El alumnado observa el estilo convencional de las matemáticas a través de los textos matemáticos y, con frecuencia, por el modo en que se expresan sus profesores cuando les explican. No desarrollan medios de expresión matemática de forma natural y pueden creer que no "hacen" matemáticas porque no pueden o no están dispuestos a usar el estilo distante, impersonal y autoritario que reconocen como estilo matemático. Los alumnos participan en las matemáticas cuando crean intencionalmente nuevas formas de organizar su experiencia o reflexionan sobre la organización, estrategias y conceptos que ya han desarrollado. Los alumnos "hacen" matemáticas cuando han desarrollado su propio conocimiento matemático y cuando utilizan un lenguaje con el que pueden expresar sus ideas matemáticas y explorar sus nuevas experiencias. No es necesario utilizar el estilo

matemático convencional para hacer esto, pero sí es importante que los alumnos se esfuercen por adquirir concisión, precisión y claridad en sus expresiones. Deben intentar expresarse con el máximo grado de precisión en lugar de concentrar sus esfuerzos en buscar la riqueza del significado, tal como se les motiva a que hagan en sus clases de lengua. *No tiene sentido hacer poesía o literatura en Matemáticas* (ERVYNCK, 1992, pág. 222). Cuando el modo en que se utiliza el lenguaje para expresar los conceptos matemáticos se debate de una forma abierta, los alumnos pueden aprender a utilizar este lenguaje para expresar eficazmente sus pensamientos.

El registro matemático

En matemáticas existe un lenguaje particular, un modo especial para expresar ideas que se denomina registro matemático (PIMM, 1987, págs 75-110). El registro matemático es la forma concreta de utilizar símbolos, un vocabulario especializado, precisión en los términos, estructuras gramáticas, formalidad e impersonalidad que resulta en modos de expresión que son evidentemente matemáticos. El registro ha evolucionado de tal forma que pueda tener lugar un discurso sobre complejos conceptos y procesos matemáticos. Un registro (HALLIDAY, 1975) no es sólo un conjunto de palabras a las que se les han asignado diferentes significados, o palabras nuevas desarrolladas para expresar distintos conceptos. Es una forma de utilizar el lenguaje para expresar conceptos e incluso un modo característico de presentar y exponer un razonamiento. El registro matemático es un conjunto de convenciones y códigos lingüísticos muy arraigados que se han desarrollado a través de muchos siglos y que regulan cómo se desarrolla el discurso matemático. Este registro no es estático; evoluciona y cambia constantemente, en parte para englobar nuevas ideas que se integran en el discurso matemático, como las matemáticas discretas y la

teoría del caos, y en parte por su relación con el lenguaje natural que de por sí cambia y evoluciona.

Evidentemente, los registros han evolucionado en otras disciplinas: por ejemplo, el Derecho tiene palabras específicas que se han de aprender para tomar parte en el discurso, tales como “agravio” e “impedimento legal”, y lo mismo ocurre con la música, ciencia y otras disciplinas (PIMM, 1987; ERVYNCK, 1992, HALLIDAY y MARTIN, 1993, MORGAN, 1998). Los alumnos tienen que asumir un registro específico para formar parte de un determinado grupo cultural; el de la música rap, por ejemplo, que tiene su propio léxico, gramática y formas de expresión. Los alumnos se dan cuenta de que hay una forma de expresión utilizada en la clase de matemáticas que difiere, digamos, de la de una clase de historia. Sin embargo, pueden no ser conscientes de la profundidad de las diferencias y la necesidad de aprender a usar el registro para poder dominar los conceptos matemáticos. Los registros también se pueden utilizar como marcadores territoriales de estatus, como un modo de señalar a algunas personas para incluirlas en ciertos grupos y para excluirlas de otros (GERGEN, 1995). En concreto, los errores en el uso de un registro normalmente se reciben con hilaridad por parte de aquellos que “saben”. De nuevo, este es un aspecto que los alumnos han experimentado en su vida social. Cuando los profesores se centran en desarrollar la destreza del alumno para utilizar el registro, estos últimos se sienten como parte de una comunidad de individuos que sabe hacer buen uso de los conceptos matemáticos.

Muchos aspectos que son aceptados como parte del registro matemático son el resultado de convencionalismos y no de la necesidad. La comunicación matemática convencional es no redundante, inamovible, inhumana, e independiente de contexto. MORGAN (1999, págs. 58-59), expuso que los matemáticos más respetados no siempre utilizan el estilo convencional en los documentos que escriben. Sin embargo, también reveló que la mayoría consideraba el estilo convencional más matemático que otras formas de expresión, hasta

el punto que los alumnos obtenían una puntuación más elevada en el GCSE * al adoptar el estilo convencional para expresar sus conocimientos, que si expresaban los mismos conceptos de una forma no convencional.

El estilo matemático convencional no tiene palabras superfluas, sólo comunica lo necesario. No existen palabras sobrantes o redundantes en la comunicación. El teorema de Pitágoras establece lo siguiente: “En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los dos catetos”. No existen palabras redundantes en esta frase. Sin embargo, el teorema de Pitágoras también se podría establecer de la siguiente manera: “En un triángulo rectángulo, si sumamos los cuadrados de la longitud de los lados más cortos, el resultado es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa”. Estas palabras extra forman una frase mucho más accesible para los alumnos de matemáticas, pero también engloba una actividad o contexto humano, que no se consideran necesarios en el estilo convencional. Las personas que piensan que el estilo convencional es importante, podrían opinar que dichas palabras muestran que el escritor o conferenciante carece de conocimientos suficientes para reconocer la redundancia de la información. En el ejemplo anterior, las palabras “ángulo” y “la longitud de” son redundantes, ya que es de suponer que un “triángulo rectángulo” ha de tener el ángulo recto y, en este contexto, el número asociado a la hipotenusa del que ha de hallarse el cuadrado debe corresponder con el valor de su longitud.

El estilo convencional de matemáticas también es atemporal, conciso e impersonal. El estilo impersonal es una convención aceptada en muchos escritos académicos y en especial en textos matemáticos. El uso de la voz pasiva y la supresión de pronombres personales son característicos del discurso matemático y esto contribuye al tono de “voz autoritaria y distante” (MORGAN, 1995, pág. 14) que es tan común

* *General Certificate of Secundary Education,* examen realizado a los alumnos de 16 años en Inglaterra y Gales. *(N. del E.)*

en los textos matemáticos. El estilo matemático también es compacto: "Los usuarios profesionales del lenguaje matemático muestran una propensión constante a mantener su lenguaje lo más sencillo y conciso posible" (ERVYNCK, 1992, pág. 222). El simbolismo matemático tiende a suprimir el contexto de las expresiones y por consiguiente hacerlas más simples. Tomemos la frase: "El número de alumnos de una clase, que se puede llamar *x*, es siempre mayor que el número de profesores en una clase (*y*)', de modo que $x > y$ simplifica la frase y la hace apta para las operaciones matemáticas, tales como los problemas de programación lineal. Los símbolos retienen la información que es matemáticamente importante y tan sólo hay que referirse de nuevo al contexto cuando se indica la solución. También es cierto que en el discurso matemático se omiten muchos pasos y sobre todo, aunque no de forma exclusiva, en el discurso escrito para que el texto resultante sea lo más compacto y conciso posible. Leer textos matemáticos a menudo requiere que el lector restablezca estos mismos pasos. Incluso algo tan básico para el lenguaje de las matemáticas como el signo *igual* puede contener significados ocultos. Puede significar una ecuación, como en $(x - 1)^2 = 2x + 3$ o una identidad como en $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ o una igualdad como $f(2) = 5$ donde f es una función dada. Existen otros ejemplos, y cada uno implica conceptos sutilmente diferentes. El contexto de la situación matemática determina la forma en que debe leerse el símbolo.

Características importantes del registro matemático

No debe confundirse el registro matemático con el estilo convencional de las matemáticas. El estilo convencional matemático no hace pleno uso del registro matemático, sin embargo, sí es posible utilizarlo, es decir, hablar y escribir acerca de conceptos matemáticos sin usar el estilo matemá-

tico convencional. Los alumnos pueden y de hecho utilizan el registro matemático para expresar sus propias ideas y conceptos matemáticos, pese a que tal vez no estén utilizando el estilo matemático convencional. Las exigencias del estilo matemático convencional, posiblemente impiden el reconocimiento de la comprensión de las ideas matemáticas por parte de los alumnos, porque estos se sienten incapaces de expresar sus ideas en ese estilo. Por tanto, es importante que un profesor admita abiertamente que aunque su estilo a menudo aparezca en los textos matemáticos que los alumnos encuentran, no tienen por qué usarlo. En su lugar deberían esforzarse por expresar sus ideas con claridad y precisión, utilizando el vocabulario adecuado y sus propias formas de expresión. El objetivo del discurso en la clase debería ser la falta de ambigüedad y usar con seguridad el vocabulario esencial en lugar del estilo impersonal, atemporal, no redundante, que es convencionalmente matemático.

Es importante recordar que, en general, el lenguaje corriente es flexible en cuanto a cómo transmite el significado, y el significado que tenga un sentido más inmediato para el oyente o el lector. La flexibilidad no es una opción en matemáticas y por esta razón los símbolos con frecuencia se emplean para asegurar la precisión en la expresión. Los alumnos que empiezan a expresar sus ideas en el lenguaje matemático quizá no obtengan tal precisión, pero con apoyo pueden llegar a ser más competentes al expresar sus conceptos matemáticos con claridad y sin ambigüedad, es decir, serán más competentes si utilizan el registro matemático.

Vocabulario específico

El registro matemático tiene un vocabulario específico (OTTERBURN y NICHOLSON, 1976; SHUARD y ROTHERY, 1984; HALLIDAY y MARTIN, 1993; TAPSON, 1997). Utiliza palabras que se dividen en tres categorías:

1. palabras que tienen el mismo significado en el lenguaje común que en el matemático, palabras que se utilizan para ubicar a las matemáticas en un contexto,
2. palabras que tienen un significado sólo en el lenguaje matemático: hipotenusa, isósceles, coeficiente, gráfico,
3. palabras que tienen diferentes significados tanto en el lenguaje matemático como en el lenguaje natural: diferencia, impar, media, volumen, valor, integral.

Existen dos problemas que surgen del vocabulario del registro matemático a la hora de ayudar a los alumnos a aprender matemáticas. El primero es que aunque las palabras utilizadas en una clase de matemáticas pueden ser similares a las palabras utilizadas en situaciones del día a día, en ocasiones el alumno precisa pensar en ellas de un modo diferente cuando se trata de matemáticas. Esto se debe a que en matemáticas, el contexto de un problema a menudo no se pretende que sea visto como una realidad. Por ejemplo, si un problema plantea el número de viajes que tiene que hacer un ascensor para transportar a determinada cantidad de personas hasta la última planta, es razonable deducir que si tarda mucho, unas cuantas personas decidirán subir a pie. En un problema matemático esto no se considera cuando se intenta dar con la solución. Los problemas del "mundo real" se introducen para demostrar que esta ciencia es accesible, real y tangible. Sin embargo, la facultad de las ideas matemáticas es que son abstractas y no contextuales, y reparar en ello ayuda a los alumnos. La segunda dificultad es que algunas palabras se emplean con diferentes significados incluso en matemáticas, por ejemplo, "cuadrado" (una forma geométrica y multiplicar un número por sí mismo), "base" (la base de un triángulo y la base de un logaritmo) y "tangente" (un ratio trigonométrico o una línea, curva o plano que toca otra curva o superficie en un punto pero no lo cruza).

Sintaxis compleja

Con frecuencia la sintaxis del estilo convencional presenta dificultades a los alumnos que estudian matemáticas. Las exposiciones convencionales de matemáticas —al suprimir la referencia personal y el uso consecuente de la voz pasiva— hacen inevitable que la sintaxis sea a veces compleja. No siempre es necesario que ésta sea compleja en un problema matemático; sin embargo, si el autor piensa que se debe utilizar la voz pasiva* convencional e impersonal, la complejidad de la sintaxis es inevitable.

A continuación citamos un párrafo de un libro de texto de nivel A:

> El conjunto de números enteros es eficaz para muchos propósitos, pero enseguida necesitamos introducir fracciones. Cualquier número que pueda ser expresado en forma *a/b* donde a y b pueden tomar cualquier valor de número entero excepto *b = 0* se llama *número racional.* Todos los números enteros son racionales mientras puedan ser expresados en la forma *a*/1. Si extendemos nuestro conjunto de números enteros Z para incluir todos los números racionales, tenemos un conjunto de números racionales Q.
>
> (SADLER y THORNING, 1987, pág. 1.)

Esta cita proviene de la introducción del libro y, en mi opinión, mantiene un estilo que pretende ser ameno para los alumnos que lo utilicen. Emplea las palabras "nosotros" "nuestro" en varios sitios para incluir al lector en las ideas que describe. Es evidente que donde se introduce una definición del concepto matemático de números racionales se utiliza la voz pasiva, volviendo de nuevo al estilo inclusivo

---

* Aunque en español se utiliza la pasiva como se ha expresado en el ejemplo ("pueda ser expresado") es más frecuente el uso de la pasiva refleja, es decir, "se pueda expresar". Véase más en PIMM, *El lenguaje matemático en el aula,* Morata, 2002, pág. 111. *(N. del E.)*

después de la definición. Se recurre a la voz pasiva para que la definición sea absolutamente precisa, aunque la sintaxis podía haber sido más sencilla al utilizar un estilo activo. Por ejemplo, "definimos un número racional como cualquier número que podamos expresar como *a/b*; mientras que *a* y *b* son números enteros y *b* puede ser cualquier número excepto 0". No obstante, está claro por este escueto apartado, que los libros de texto utilizan la voz pasiva para introducir ideas matemáticas pese a la complejidad de la sintaxis.

En ocasiones se recurre a la voz pasiva para hacer una afirmación matemática porque la voz activa introduciría complicaciones innecesarias. Una frase como "cada parte de la ecuación es dividida en tres" es difícil que resulte "activa", aunque se introdujera el "tu" personal o incluso el "nosotros". Tal como he afirmado antes, "tu" o "nosotros" se introducen a menudo para que el lector se sienta incluido en el texto. Sin embargo, esto puede resultar confuso, ya que es poco probable que el lector se involucre en la división. En la medida en que los alumnos se familiarizan con las matemáticas, esta frase no se usaría, sino que se plasmaría como $3x = 15 \Rightarrow x = 5$, al asumir la división entre tres. Utilizar la voz pasiva en matemáticas cuando los alumnos no están familiarizados y todavía no son usuarios expertos en el idioma, es otra barrera que impide que sientan que son capaces de leer y usar los conceptos matemáticos.

El uso de la metáfora para transmitir un significado

La metáfora aparece en todos los niveles del discurso matemático: las funciones obedecen ciertas reglas, una función es *una máquina* y una ecuación es una *equidad*. Estas metáforas son útiles en el desarrollo de conceptos matemáti-

cos, pero su presencia no siempre se reconoce. En efecto, el solo hecho de reconocer una metáfora es difícil por la manera en que se construye y se utiliza el registro matemático. Al igual que en el lenguaje coloquial, el uso abusivo de la metáfora puede resultar un fracaso. La idea de que una ecuación *es una equidad* funciona muy bien hasta que se incluyen los números negativos en los problemas que se han de solucionar. Si el alumno confía en esa metáfora y no en los conceptos subyacentes de las ecuaciones, no tendrá la menor idea de cómo proceder en caso de desaparecer la metáfora. El uso persistente de una metáfora en lugar de un símil (por ejemplo, una función es una máquina en lugar de decir *es como* una máquina) tiene un gran potencial para la confusión y malentendido cuando los alumnos intentan abrirse camino hacia el registro matemático.

> Si los alumnos no están acostumbrados a dar sentido matemático a las expresiones, al tratar de aplicar el sentido literal a un enunciado y no dar con el propio del mismo, es probable que se queden ahí, dado que no hay nada que indique que se encuentran ante algo nuevo.
>
> (PIMM, 1987, pág. 109*.)

El poder de las palabras en el registro matemático

Una palabra o expresión contenida en el registro matemático tiene el poder de evocar una compleja red de ideas que forman el concepto matemático. El vocabulario correcto es muy importante debido al poder de las palabras del registro matemático, que es lo que permite al alumno traer a la memoria, utilizar, transformar y dominar las ideas matemáticas para solucionar problemas. Si se pide a los alumnos que empleen sus propios nombres para las ideas matemáticas

* Pág. 160 de la traducción al castellano. *(N. del E.)*

que elaboran, pueden comprender mejor el aspecto del registro matemático y tener más capacidad para explotar esta característica.

Dificultades que surgen al utilizar el lenguaje matemático en la clase

El lenguaje matemático como una segunda lengua

Puesto que la forma específica en que se expresan las matemáticas se asemeja bastante a una lengua diferente con muchas de las características de una lengua natural, es razonable examinar si enseñar matemáticas como si fuera una segunda lengua extranjera puede o no ayudar a los alumnos a superar algunas de las barreras de aprendizaje que aparecen al utilizar el registro matemático. Aprender un idioma extranjero requiere que los alumnos dominen las palabras, la gramática y la sintaxis de la lengua, así como tener alguna noción de la cultura que utiliza el lenguaje para expresar ciertas ideas y conceptos. Es necesario aprender el idioma matemático para poder expresar las ideas y conceptos que forman su disciplina, y al aprender la lengua los alumnos empiezan a familiarizarse con la cultura.

Aprender a “expresarse” como un matemático

El propósito fundamental de cualquier lengua natural es que sirva para expresar un conjunto de ideas. Las matemáticas contienen fundamentalmente fórmulas. El lenguaje se utiliza para expresar conceptos matemáticos, así como la interacción y relación entre estos conceptos. Todas las lenguas naturales expresan matemáticas al utilizar palabras de

este lenguaje, pero también usan formas de expresión que son reconocibles como matemáticas en todo el mundo. Es cierto que la "fluidez en una lengua extranjera se consigue a través de la habilidad para pensar en este idioma" (ERVYNCK, 1992, pág. 219) Por tanto, para expresarse con fluidez en matemáticas los alumnos deben también ser capaces de pensar en el lenguaje matemático. Es posible equiparar la fluidez en matemáticas con tener conocimientos o dominar los conceptos matemáticos (PIMM, 1987; GERGEN, 1995). Lo idóneo sería introducir abiertamente el lenguaje matemático al tiempo que se enseña el pensamiento matemático. Al hacer uso de este registro matemático para su propio propósito, es cuando los alumnos llegan a expresarse como matemáticos: "los niños necesitan aprender a pensar como matemáticos y a usar el lenguaje matemático para crear, dominar y enunciar sus propias expresiones matemáticas, así como interpretar el lenguaje matemático de otros" (PIMM, 1995, pág. 179).

"Hacerlo bien"

Muchas personas opinan que hay una respuesta adecuada o correcta para cada problema de matemáticas, y probablemente sea cierto para la mayoría de los problemas que los alumnos resuelven en el colegio. El inconveniente de pensar que las matemáticas tienen este grado de exactitud es que disuade a los alumnos de asumir riesgos. Si sólo hay una respuesta correcta, entonces todas las demás deben ser incorrectas y, por tanto, aventurarse a dar una respuesta equivocada constituye demasiado riesgo. Alumnos y alumnas a menudo hacen una extrapolación desde el hecho de que hay una respuesta acertada hacia la convicción de que hay una forma correcta de resolver un problema. Esta manera de pensar puede suponer un obstáculo importante cuando los alumnos hablan sobre sus ideas o reflexionan sobre dife-

rentes formas de resolver un problema. Prefieren que se les ofrezca la forma “correcta” de proceder para no arriesgarse a parecer estúpidos si se equivocan.

A muchos alumnos les preocupa “hacerlo bien” y cuando no están seguros prefieren no hacer nada. Lo que a primera vista puede parecer pereza, en realidad podría ser que ellos prefieren parecer vagos a estúpidos cuando no están seguros de cómo “hacerlo bien”. Los profesores tienen que realizar un gran esfuerzo, para ayudarles a superar la fuerte convicción de que hay una sola forma “correcta” de proceder para solucionar un problema, y su tendencia a querer usar esta forma única en lugar de otra que encaje mejor con su propia experiencia previa. Los alumnos a veces optan por copiar un algoritmo mal entendido que mejorar un pequeño error en sus métodos.

Se puede convencer a los alumnos de que merece la pena ofrecer ideas diferentes, siempre y cuando sientan que sus creencias son valoradas y respetadas, y que es seguro arriesgarse para mejorar su comprensión, pero esto no sucederá rápidamente. La observación y recursos de autoevaluación pueden ayudarles a formarse una idea de todas las sombras y matices que componen un resultado de elevada calidad. Es entonces cuando los alumnos se convencen de que lo están “haciendo bien”.

Existen otros factores en juego cuando alumnos y alumnas expresan su temor a no “hacerlo bien”. Muchos están convencidos de que tienen un nivel predeterminado de destrezas y les preocupa que este nivel sea bajo; esto es una “entidad de teoría de aprendizaje” (DWECK, 2000). Los estudiantes poseen razones para pensar que tienen un nivel bajo de capacidad cuando los profesores puntuan un proceso sin explicar cómo pueden mejorar su aprendizaje, cuando no usan los criterios de evaluación para mostrarles lo bien que aprenden o cuando son agrupados según sus capacidades, un proceso muy común en la educación secundaria de las escuelas del Reino Unido. Un planteamiento más efectivo

sería asumir que todo el mundo puede mejorar su capacidad para usar los conceptos matemáticos con su propio esfuerzo y con ayuda de quienes tengan en cuenta sus dificultades para el aprendizaje. Esta es la teoría incremental del aprendizaje. Si los alumnos encuentran dificultad en algún trabajo, esto es “bueno” porque es entonces cuando pueden empezar a aprender y no es “malo” porque han alcanzado el límite de sus capacidades. Es importante realzar el punto de vista del aprendizaje progresivo en un ambiente que utilice la actividad oral como herramienta para aprender matemáticas y en el que se incentiva a todo el mundo para expresar sus ideas e inseguridades.

Conclusión

El lenguaje de las matemáticas es particular y utiliza un vocabulario y formas de expresión especiales llamadas registro matemático. Algunas de las características del registro matemático son potencialmente confusas para los alumnos que están aprendiendo matemáticas; por ejemplo, palabras que tienen dos o más significados, el uso de la metáfora, o la conclusión de que la expresión matemática ha de ser lo más concisa posible. El papel del profesor es mediar entre el discurso de matemáticas y el discurso que utilizan los alumnos de forma rutinaria. De esta manera, crean puentes entre ambos discursos para que los alumnos sean capaces de utilizar el lenguaje matemático para reflexionar, investigar y comunicar sus ideas.

Tan pronto como alumnos y alumnas se escolarizan de manera oficial, se encuentran con un estilo matemático convencional de expresión que es impersonal, atemporal, no redundante y conciso. No es necesario para el alumnado utilizar este mismo estilo y de hecho muchos matemáticos no lo hacen. Sin embargo, sí es deseable que sean más competentes a la hora de utilizar y leer este estilo convencional,

para adquirir mayor capacidad para tomar parte en un discurso matemático más complejo, ya que a menudo se les considera mejores en matemáticas si son capaces de utilizar el estilo convencional.

Es importante que los alumnos utilicen el lenguaje matemático por su propia iniciativa. Serán capaces de expresar sus conocimientos y sus dudas, de tal modo que estarán preparados para aprender más. También podrán trasladar los conceptos matemáticos a situaciones nuevas y dominar sus ideas matemáticas. Los estudiantes que son capaces de utilizar el lenguaje matemático para expresar sus ideas, son capaces de comunicarse entre ellos y con su profesor. De este modo, ambos estarán dispuestos a elaborar y compartir el significado de las palabras y expresiones y, por último, todo el alumnado aprenderá matemáticas de un modo eficaz.

CAPÍTULO III

Empezar a hablar en la clase de matemáticas

En el Capítulo II expuse lo que constituye el lenguaje matemático y qué barreras potenciales podrían surgir mientras se usa este lenguaje para expresar conceptos matemáticos. En este capítulo contemplo formas de interactuar en la clase y ayudar a los alumnos a aprender a usar el lenguaje matemático para profundizar en su conocimiento de las matemáticas. Trato temas como la organización de la clase y cómo garantizar una actitud inclusiva, y propongo métodos prácticos para conseguir que los alumnos se expresen y aprendan. No proveo recetas para las medidas a tomar, sino principios encaminados hacia una enseñanza reflexiva. A los profesores les gusta "saber cómo sería una clase así" y hacia el final del capítulo describo varias sesiones en las que se llevan a la práctica los principios descritos con anterioridad.

Organizar la clase

La primera consideración y la más importante, para establecer una clase en la que los alumnos van a usar la expresión oral como medio para aprender matemáticas, es la orga-

nización del aula. Si han de hablar y escucharse unos a otros tendrán que poder verse y oírse. Sé que esto parece obvio, pero según mi experiencia es algo que a menudo los profesores de matemáticas no consideran. En una clase de matemáticas existen muchos problemas y barreras que emergen por la forma en que debe usarse el lenguaje al expresar los conceptos matemáticos; es importante que el aula no tenga barreras adicionales físicas. Los alumnos descubren que es complicado expresar ideas matemáticas y pedirles que alcen la voz para hacerlo presenta una barrera adicional e innecesaria.

Existen muchas razones para valorar la disposición de los alumnos en el aula.

Si los alumnos se pueden oír unos a otros, los profesores no tienen que repetir o reiterar lo que estos dicen. Repetir o reafirmar la comunicación de los alumnos significa que el profesor interviene en todo lo que se dice. Los alumnos no son *dueños* del discurso, ya que pasa por el profesor y es casi imposible que respondan entre ellos porque siempre están contestando al profesor. Al repetirlo, los profesores cuando repiten lo que los alumnos dicen a menudo lo transforman. El énfasis varía o muchas veces cambian las palabras, normalmente para introducir un lenguaje más matemático. Cuando el profesor procede de este modo los alumnos no necesitan utilizar el lenguaje matemático, dado que el profesor ya provee el vocabulario o las frases más importantes. Repetir o reiterar lo que dicen los alumnos es contraproducente si el profesor pretende que utilicen el lenguaje matemático para expresar y debatir sus ideas.

Si los alumnos se pueden ver y oír, pueden escuchar lo que se dice y desarrollar una comprensión de los conceptos matemáticos. Tanto alumnos como profesores obtienen ventajas al escucharse unos a otros; de hecho, es al escuchar cuando la Evaluación para el Aprendizaje entra en acción. Los alumnos escuchan las ideas de otros compañeros y pue-

den valorar en qué medida estas ideas coinciden con las suyas. De este modo están en condiciones de autoevaluarse y hacerse preguntas tales como:

- ¿Estoy de acuerdo con lo que se ha dicho?
- ¿Estoy en desacuerdo con lo que se ha dicho y/o quiero recordar al que habla algo que haya olvidado?
- ¿Siento inseguridad acerca de lo que se ha dicho y quiero hacer una pregunta para aclararlo?
- ¿Tengo conocimientos que podría añadir a lo que se ha dicho?

Al hacerse estas preguntas, los alumnos obtienen beneficios inmediatos a su conocimiento actual. Cuando realizan preguntas de seguimiento o afirmaciones complementarias, no sólo aportan al conocimiento que se desarrolla en la clase, sino que también fomentan una respuesta inmediata de los oyentes.

Cuando los alumnos se acostumbran a utilizar el discurso como una herramienta de aprendizaje, no se hacen las preguntas planteadas anteriormente de una manera consciente, pero sí piensan en esa línea. En lugar de pensar: “¿Estoy de acuerdo?” o “¿Tengo algo que añadir?”, se concentran al máximo en el concepto sobre el que se debate y en comprender dicho concepto. Sin embargo, si los alumnos encuentran la discusión compleja, como es normal en matemáticas, al pedirles que reflexionen sobre estas preguntas mientras se escuchan mutuamente, adquieren claras directrices sobre cómo deberían responderse. Además, hacer preguntas asegura que cada alumno ampliará su propio entendimiento al contribuir al debate global; esto tranquiliza a muchos estudiantes.

Cuando los alumnos escuchan, se responden mutuamente y razonan las ideas que se plantean, los profesores también escuchan y observan. Si la conversación comienza a derivar en ideas erróneas los profesores pueden intervenir

adecuadamente. Si se presenta alguna dificultad pueden ofrecer ideas o conexiones que reinicien el debate. Si los alumnos sobrepasan las expectativas de los profesores, pueden aportar algo más a sus conocimientos. Cuando los docentes escuchan activamente pueden saber lo que piensan y entienden los alumnos e intervienen para proponer actividades de aprendizaje más apropiadas. De nuevo, esto es Evaluación para el Aprendizaje funcionando para ampliar el conocimiento de la clase.

Cuando los alumnos se pueden ver y escuchar unos a otros, el debate se convierte en una conversación de aprendizaje que se puede extender a un grupo de trabajo más reducido. Cuando el debate de toda la clase se desenvuelve de modo que los alumnos se puedan ver y oír mutuamente, comprueban que éste es un buen método para aprender. Los debates en los que participa toda la clase pueden servir de modelo para conversaciones durante trabajos en pequeños grupos. Según mi experiencia, los alumnos enseguida adquieren capacidad para usar el lenguaje matemático y por consiguiente expresar sus ideas en los debates de clase, pero les cuesta más cuando lo hacen en grupos pequeños. Durante las conversaciones en las que participa toda la clase, los profesores pueden apoyar y alentar e incluso exigir a sus alumnos que usen el lenguaje matemático para expresar sus conocimientos, pero éste no es el caso en grupos reducidos. Por otro lado, cuando usan el lenguaje matemático en grupos reducidos, son más los que tienen la oportunidad de aprovechar las ventajas de expresar sus pensamientos. Discutir las ideas con toda la clase ayudará a los alumnos a utilizar el lenguaje matemático en grupos reducidos. A menudo, también es necesario que intercambien ideas al inicio de la clase, para elaborar un registro matemático propio que les permita discutir sus conceptos en grupos más reducidos.

Por consiguiente, los alumnos han de posicionarse en la clase de modo que puedan verse y escucharse unos a otros.

Hay muchas maneras de hacer esto al igual que hay muchos tipos de aula, pero sugiero dos modos:

Pedir a los alumnos que se acerquen y se reúnan en torno a la pizarra. Éste siempre ha sido mi método favorito de conducir conversaciones en clase; esto se debe a que cuando los alumnos se sientan cerca:

- pueden hablar entre ellos con mayor facilidad; no tienen que alzar la voz en absoluto y por tanto la conversación es más natural; me doy cuenta de que incluso aquellos que en otras situaciones puedan haber tenido resistencias para contestar, se unen a la conversación cuando están rodeados por otros que también intentan entender un concepto matemático;
- pueden escuchar y responderse mutuamente; los alumnos escuchan las ideas del otro con facilidad cuando están juntos y es mucho más probable que piensen en lo que dicen sus compañeros y ofrezcan una respuesta;
- es difícil desentenderse, todo el mundo se involucra en la conversación con mayor naturalidad; en un contexto normal de clase es posible que un profesor repare en alguien que no ha respondido a ninguna pregunta ni se ha unido a la conversación durante muchas lecciones; estos son los alumnos que no miran directamente al profesor o parecen “esconderse” detrás de sus pupitres; cuando se juntan con otros parecen estar más dispuestos a participar y el profesor puede asegurarse de que sea así al pedir una determinada colaboración o al solicitar al propio grupo que se asegure de que todo el mundo está implicado;
- el docente está mejor capacitado para reforzar la actitud de la clase; si un alumno “se lanza” pero comete un error, el profesor instantáneamente identifica y sanciona cualquier “broma” o comportamiento inadecuado; sin embargo, me doy cuenta de que al reunir más a los

alumnos, su comportamiento mejora considerablemente; enfatiza el hecho de que se trata de una conversación y no de una competición, estamos trabajando juntos para mejorar el entendimiento de todos y todos podrían y deberían hacer preguntas o aportar ideas.

Muchos profesores de primaria piden a los alumnos que se sienten sobre una moqueta lejos de las distracciones de sus pupitres, para concentrarse en la conversación y aprender de principio a fin. Yo no recomendaría que los estudiantes de secundaria se sentaran en el suelo, pero a fin de cuentas la idea es la misma: agrupar a la clase para que puedan saber que éste es el momento de hablar, pensar y aprender. Para ello, es relativamente fácil para los alumnos estar de pie o traer sillas, también pueden "apoyarse" sobre las mesas. Al principio, los profesores pueden iniciar la conversación, establecer el objetivo de aprendizaje y realizar preguntas para que la clase reflexione. Pueden hacer de "escribientes" y registrar los puntos importantes que surjan. Los profesores escuchan activamente y observan para poder intervenir cuando sea apropiado, y observar lo que saben, entienden y son capaces de hacer sus alumnos.

Organizar las mesas en forma de U. Esta distribución es la predilecta entre muchos profesores modernos de lengua extranjera, que también necesitan que sus alumnos escuchen y hablen entre ellos. En esta disposición los alumnos se pueden ver y oír relativamente bien y, si es necesario, anotar en sus cuadernos o en pequeños tableros las ideas que se debaten. Es posible que tengan que alzar algo la voz cuando interaccionen, pero se acostumbran rápido y los profesores pueden pedir respuestas desde ciertas áreas del aula en diferentes momentos, para asegurarse de que todo el mundo está involucrado en el diálogo. Si los docentes quieren que sus alumnos discutan ideas en grupos reducidos antes de

participar en un debate con toda la clase, esta disposición es idónea; los profesores que hacen uso con frecuencia del debate en sus clases prefieren esta distribución, ya que es un método rápido y directo para razonar un tema que haya surgido tanto en un trabajo individual como en grupo. A los alumnos les es más cómodo hablar entre ellos, ya que pueden ver la mayor parte de la clase y el profesor también puede escuchar y observar mejor.

La organización del aula es importante si los alumnos han de aprender a usar el lenguaje matemático. La colocación deberá permitir a los alumnos verse y oírse sin necesidad de levantar la voz demasiado. Los alumnos se apoyarán mutuamente si se les motiva para ello a través de las actividades de aprendizaje en la que están involucrados y de la organización del debate.

Incluir a todos en el discurso: Fomentar la actitud adecuada

Incluir siempre a todos los alumnos en las reflexiones y en el discurso parece un sueño imposible, pero los profesores pueden esforzarse por mejorar este aspecto. Organizar la clase para que los alumnos se puedan ver y oír unos a otros y al profesor, sin duda ayuda a la inclusión pero se pueden probar otras tácticas. La primera y la más importante es hacer preguntas y desarrollar actividades que todos los alumnos consideren que merecen reflexión. Trataré este tema más adelante en este mismo capítulo. La segunda es fijar objetivos que dejen claro que el profesor espera que todo el mundo contribuya. La tercera es que el profesor se asegure de que todos tengan la oportunidad de aportar algo en un conjunto de temas.

Nadie levanta la mano

Cuando los alumnos levantan la mano para contribuir al debate tienen que esperar a que el profesor les indique que tienen la palabra, con lo cual todas las intervenciones son autorizadas por el profesor y el incentivo al diálogo de alumno a alumno se reduce, resultando a menudo imposible. A veces el profesor pide a la clase que colabore, pero elige a un determinado alumno para hacerlo, por tanto si los alumnos levantan o no la mano, resulta irrelevante. He oído decir a profesores "yo espero hasta que casi todo el mundo haya levantado la mano y después pregunto a alguno que no lo haya hecho sólo para comprobar si prestaba atención". De esta manera, el alzar la mano se convierte en una estrategia para controlar la clase. Me han dicho que levantar la mano evita que los alumnos digan la respuesta en voz alta. He visto a muchos alumnos con la mano levantada "soltar" una respuesta que no les han pedido porque no se pueden contener, por lo que este argumento no me convence. Sé que una vez que los alumnos levantan la mano dejan de pensar en las matemáticas y comienzan a competir por llamar la atención del profesor. Por consiguiente, pienso que no dejar que levanten la mano es una buena idea por diversas razones:

- si los alumnos no tienen que levantar la mano, no les queda más remedio que reflexionar: es más probable que el profesor les deje un tiempo para pensar si la norma en la clase es no alzar la mano;
- los alumnos pueden aprovechar todo el tiempo que se les ha concedido para pensar en el problema en cuestión; he visto a profesores pedir a sus alumnos que levanten los pulgares cuando han tenido suficiente tiempo para pensar; esto no es un "quiero responder" competitivo, sino sólo una indicación para que el profesor sepa cuando ha de comenzar el debate;

- todos tienen tiempo para pensar, de modo que todos tendrán una respuesta preparada, aunque sea "no lo sé"; por tanto, nadie puede quedarse fuera por no levantar la mano o agachar la cabeza; es importante que la respuesta "no lo sé" sea aceptada, pero interpretada por todos como "tengo que aprender"; el profesor se reunirá con el alumno en el momento adecuado y comprobará que ha aprendido más con el debate;
- el tiempo es utilizado para pensar y no se malgasta en esperar a que un número adecuado de alumnos haya levantado la mano o a que el profesor pregunte a un número suficiente de voluntarios para que nadie se quede fuera; un profesor me contó, en una ocasión, que ahorra diez minutos en cada clase al no permitir que los alumnos alcen la mano; parte de este tiempo ahorrado se debía a que las respuestas que daban sus alumnos eran más lógicas y apropiadas y aceleraban así el aprendizaje;
- puesto que todo el mundo tiene la ocasión de tener una respuesta preparada, se pueden esperar más intercambios entre los alumnos sobre todo si no están acostumbrados a pensar con un criterio de "autoevaluación" razonado con anterioridad; los alumnos tienen capacidad para estar o no de acuerdo o buscar clarificación de sus ideas sin contar con el profesor y entablar un auténtico debate en el que se piensa y se aprende; he visto muchos diálogos de este tipo en clases que utilizan estas técnicas; los alumnos dialogan y desarrollan ideas entre ellos, hacen conexiones y surgen pensamientos sobre otras áreas; los profesores son capaces de observar y reflexionar sobre el aprendizaje de cada alumno: de hecho, el único momento en que hacen aportaciones a los diálogos, es cuando se les pide un consejo "profesional" sobre alguna cuestión que los alumnos deciden que no pueden resolver por ellos mismos.

No ocurre nada por dar una respuesta equivocada

Con frecuencia los alumnos dicen que temen aportar ideas a un debate de clase por si ofrecen una respuesta equivocada y son ridiculizados por sus compañeros. Estas preocupaciones no deberían pasarse por alto, y es importante que se afronten.

Los alumnos han de entender que los profesores quieren conocer lo que realmente piensan o saben, ya que es importante para decidir cuál será la siguiente experiencia de aprendizaje. Si los alumnos entienden esto, sabrán con certeza que a los profesores les interesan todas las respuestas, estén bien o mal. Una respuesta “equivocada” ayuda al profesor a evaluar lo que necesitan sus alumnos quizá incluso más que una respuesta “acertada”. Las respuestas “equivocadas” revelan errores que el profesor necesita aclarar y si un alumno piensa de una forma determinada es muy probable que otros alumnos lo hagan también. Conocer las dudas de los alumnos permite a los profesores planear actividades de aprendizaje apropiadas. Los docentes pueden asegurar a sus alumnos que las respuestas “equivocadas” son las más interesantes porque ponen de manifiesto lo que realmente necesitan saber.

Si las respuestas de los alumnos son siempre correctas es posible que el trabajo planteado sea demasiado fácil. Esta no es la forma en que habitualmente piensan los alumnos. De hecho, normalmente asumen que si su respuesta es equivocada significa que no pueden “hacer matemáticas”, en lugar de entender que necesitan esforzarse más o pensar de un modo más abierto. Los profesores pueden ayudar a disipar esta noción hablando con los alumnos. Utilizar frases como “¿Te parece difícil? Bien, ¡empiezas a conocer algo nuevo!” puede ayudar a los alumnos a recordar que aunque sus respuestas sean erróneas, esto no indica una falta de habilidad, sino que han empezado a hacer un esfuerzo por aprender.

Una actitud inclusiva

Una vez que los alumnos reconocen que dar una respuesta equivocada es aceptable, se disipa algo del miedo al ridículo. Sin embargo, los profesores también tienen que reconocer que parte del miedo al ridículo se genera al utilizar un lenguaje que ellos no sienten como propio. Si alumnos y alumnas han de expresar con claridad sus ideas matemáticas, es obvio que necesitarán utilizar el lenguaje matemático hasta cierto nivel. Se sentirán torpes al hacer esto: recuerdo lo torpe que me siento cuando empiezo a utilizar el francés al inicio de mis vacaciones en Francia, pero también sé que esta sensación desaparece en la medida en que lo practico. Los alumnos sienten que utilizan un lenguaje que sólo usan los matemáticos “instruidos”, y al hacerlo actúan como tales al tiempo que se esfuerzan por entender las matemáticas. Sin embargo, cuanto más utilizan el lenguaje matemático, menos ridículos se sienten y más capaces son de utilizar sus ideas matemáticas.

Por tanto, en cierta medida, establecer una actitud inclusiva en una clase de matemáticas, es asegurarse de que no haya comentarios inapropiados mientras los alumnos se esfuerzan por expresar sus ideas matemáticas. Pero otra parte importante es ayudarles a acostumbrarse a usar el lenguaje matemático por sí mismos, para que puedan expresar claramente sus ideas matemáticas sin sentir que están usurpándole a alguien su lenguaje.

Gemma

Al inicio de la investigación Gemma estaba muy negativa respecto a las matemáticas. Las tareas no le resultaban especialmente difíciles, pero le parecía que no tenía ningún sentido hacerlas. Gemma, al igual que otros compañeros, estaba muy reacia a expresar sus ideas matemáticas. En una clase sobre

la serie de Fibonacci pedí a un par de alumnos que trabajaran juntos para redactar una explicación de cómo funcionaba la serie. La mayor parte de los alumnos la describió de la misma manera, pero Gemma y su compañera Nina hicieron una versión diferente.

Los alumnos contemplaron la serie y dieron su propia explicación. Escribí en la pizarra cada una de las explicaciones que me dieron tal como me las dictaron.

"1 más 1 son 2, 1 más 2 son 3 y así sucesivamente hasta conseguir una secuencia" (de ocho grupos).

"Se suma el número que va delante para llegar al siguiente." (de Angie y Colin).

"Se suman los dos números que van primero para conseguir el siguiente" (de Gemma y Nina).

Cuando pedí a la clase que decidiera cuál de las explicaciones escritas en la pizarra era "la mejor", todos votaron por la de Gemma, y decidieron apuntarla en sus cuadernos. Este fue un hecho importante para Gemma: le ayudó a entender que podía usar el lenguaje matemático para expresar sus ideas y a que estuviera más dispuesta a hacerlo.

Otro factor importante para Gemma fue que yo permití que tuviera oportunidad de elección en lo que hiciera. Ella sabía lo que se esperaba que aprendiera, pero la forma en que aprendía los conceptos hasta cierto punto era su responsabilidad. Cuando se le permitía tomar decisiones parecía estar más preparada para intentarlo. A lo largo del año Gemma adquirió más seguridad y elaboró diversas tareas con mayor disposición. Desarrolló varios proyectos escritos muy bien explicados, y se hizo más independiente y menos necesitada de apoyo. Entabló diálogos más equitativos conmigo y con sus compañeros en los que discutía sus ideas, escuchaba a otros y ofrecía su opinión.

El tiempo es un factor importante en el aprendizaje

Los alumnos no pueden expresar sus conocimientos si no tienen tiempo para pensar y reflexionar sobre sus ideas; por tanto, el tiempo para pensar debería ser una parte habitual de la práctica de clase. Existen diversas formas de darles ocasión para pensar: se les puede pedir que piensen en silencio durante unos segundos; que hablen con un compañero y tomen decisiones en un período que oscile entre 30 segundos y unos minutos, dependiendo del problema; o que trabajen con un problema durante algún tiempo en un grupo más amplio. Una manera de darles oportunidad para pensar y reflexionar, y que los profesores a menudo pasan por alto, es encargarles una tarea difícil que requiera bastante reflexión.

Pensar solos en silencio durante unos segundos es una buena práctica durante una sesión de preguntas con toda la clase. Con frecuencia los alumnos consideran que deberían ser capaces de dar una sola respuesta correcta a todos los problemas matemáticos y que deberían poder hacerlo con rapidez. Esta idea está fomentada por el modo en que se conducen muchas sesiones de preguntas a toda la clase. Por consiguiente, los alumnos se sienten tensos cuando el trabajo les exige más y no pueden dar una respuesta rápida, llegando a la conclusión de que no pueden "hacer" matemáticas. Por supuesto, algunos profesores de matemáticas quieren respuestas rápidas de los alumnos, pero éste no debería ser el único método de preguntas utilizado. Si en todas las clases se concede a los alumnos algún tiempo para pensar y reflexionar, afrontarán otros aspectos complejos de matemáticas de la misma manera.

A veces es recomendable pedirles que discutan sus ideas con un compañero para que puedan disponer de tiempo para pensar y reflexionar. Existen muchas maneras de usar "compañeros de respuesta" o "compis de estudio".

- Se puede requerir a los alumnos que piensen en silencio y escriban cinco palabras que asocien con el concepto. Si después dialogan sobre estas palabras con un compañero plasmarán sus ideas en un gráfico o diagrama con más convicción.
- Si los alumnos están reacios a ampliar sus respuestas en clase, sobre todo cuando han estado acostumbrados a contestar con una sola palabra, tendrán que trabajar con un compañero para decidir sobre una respuesta con un mínimo de palabras, por ejemplo, siete o diez. De nuevo, ensayar la respuesta con otras personas ayuda al alumno a sentirse seguro cuando se le solicita contribuir a una discusión de clase.
- Se puede pedir a los alumnos que trabajen con un compañero para decidir sobre el vocabulario que deben usar en la explicación de un concepto matemático. Si se les invita a que escriban sus ideas sobre una pizarra pequeña o en un papel, se pueden exponer para que toda la clase las considere. Una vez expuestas las explicaciones y desvinculadas de sus autores, se les pide que consideren cuál es la “mejor” o qué palabra o frase expresa con mayor claridad sus ideas. Esto ayuda a los alumnos a adquirir fluidez en el lenguaje matemático.

Los alumnos se acostumbran a discutir sus ideas originales con un compañero y después están preparados para aportar ideas al debate con toda la clase, lo cual ayuda a todos a desarrollar conocimientos. Las ideas anteriormente descritas son maneras de ayudarles a entender cómo deben trabajar con sus compañeros de diálogo y qué beneficio supone para su aprendizaje.

Los alumnos necesitan tiempo para asimilar ideas, así como para trabajar con conceptos matemáticos y familiarizarse con ellos. Es difícil calibrar cuánto tiempo se requiere para ello. Pasar a otro tema antes de que se sientan seguros

de haber entendido bien y de que puedan usar los conceptos recientes, hará que crean que no han tenido éxito en el aprendizaje. Sin embargo, pasar el tiempo trabajando con las mismas ideas, de la misma forma una y otra vez es tedioso para los alumnos, lo que también les puede hacer sentir que han fracasado. Una solución a este problema puede ser establecer un reto que les exija desarrollar ideas y conceptos en un período de tiempo limitado. El ritmo de las clases se ha de valorar cuidadosamente. Los alumnos necesitan tiempo para asimilar ideas, pero las lecciones deben tener sentido y estar bien enfocadas. Un problema complejo podría requerir que el alumno se centre en una idea durante más tiempo que el dedicado al método de preguntas cortas, lo cual además les permite observar el progreso de su aprendizaje de las matemáticas.

Pedir a los alumnos que piensen y reflexionen es parte de un proceso de aprendizaje que se pone en movimiento al requerir que expresen sus conocimientos matemáticos. También es vital para aplicar la Evaluación para el Aprendizaje. Sin tiempo para reflexionar, los alumnos no se implican en la reorganización de sus nociones, que es una parte importante del proceso de aprendizaje. Además, las respuestas que dan los alumnos no serán un reflejo real de su comprensión actual y por tanto el profesor no tendrá una información exacta para guiar las siguientes actividades.

Crear un contexto de lenguaje matemático

He explicado que es importante que los alumnos expresen sus conceptos matemáticos con claridad si quieren mejorar su aprendizaje de las matemáticas. También he hablado acerca de la distribución de la clase y de establecer una actitud que favorezca la expresión de estos conceptos. La idea de conceder a los alumnos tiempo y oportunidades para pensar y reflexionar es genérica a cualquier área de la

enseñanza; sin embargo, existen factores específicos a tener en cuenta cuando se incentiva a los alumnos a expresar sus ideas debido a la complejidad del lenguaje matemático.

Tal como he explicado en el Capítulo II, los estudiantes de matemáticas deben aprender a expresar sus ideas con un lenguaje matemático si quieren compartirlas con otros. Sin el lenguaje matemático, los alumnos tienden a señalar y abusar de "este" y "ese otro", que no es la claridad que requieren las matemáticas y a menudo les lleva a concluir que no saben cómo usar un concepto matemático, cuando en realidad lo que no saben es cómo hablar de él.

Tomemos, por ejemplo, este fragmento de un pequeño grupo de niños de 3.º curso* que comparte sus ideas con una profesora, en donde P indica profesor y A1, A2 y A3 son los alumnos 1, 2 y 3 respectivamente.

P	Mira eso. (La profesora señala a una pizarra sobre la que está escrito: _ ÷ 5 = _ + resto ¿Cuál es el mayor número entero que puedes conseguir en él si divides un número entre 5?
A1	4.
P	¿Por qué piensas que es 4?
A1	Porque es el número mayor, mmmm el que ... usa el número entero que puedes conseguir que sea menor que 5.
P	Bien. ¿Qué ocurriría si hubiera allí un número mayor que 5? ¿Qué...
A1	No sería mayor, no se dividiría entre 5, mmmm dividiría entre 10.
P	Voy a cambiarlo por tres (cambia el 5 de la pizarra por un 3) así que si ahora tengo un número y lo divido entre 3, ¿cuál sería el mayor resto que puedo obtener?

* En el Sistema Educativo Británico corresponde a un alumnado de 7 y 8 años. *(N. del E.)*

A2	2
P	¿Por qué?
A2	Porque si es 4 sería la tabla del cinco.
P	Si es 4 sería la tabla del 5... un poco más...
A2	Y... (sacude la cabeza) no lo sé.
P	¿No?
A3	Si es 3... mmm no habría resto.

Para poder expresar sus ideas con claridad, estos alumnos necesitan conocer más vocabulario, por ejemplo “múltiplo” y “factor”, pero también necesitan saber cómo expresar ciertas ideas matemáticas, como “si el resto fuera 5 o más, entonces el 5 entraría en otra tabla”. La profesora no reparó en frases como “número más grande” o “si vas a por 4 estaría en la tabla del 5”, lo cual demostraba que la alumna n.º 2 hablaba del tamaño del espacio entre los múltiplos de 5, posiblemente porque había una cámara de vídeo dirigida hacia ella. Puesto que los alumnos parecen incapaces de utilizar ciertas palabras y expresiones, simulan ante la profesora y ante ellos mismos que desconocen algunos conceptos matemáticos. Cuando A2 dice “Y... no lo sé”, admite que no sabe expresar sus ideas, razón por la que posiblemente dedujo que no sabía nada acerca del concepto que se estaba analizando. Al parecer, el objetivo de la profesora es enseñar a sus alumnos ideas matemáticas, pero por este fragmento de la conversación se deduce que no ha pensado enseñarles cómo utilizar el lenguaje matemático para expresar sus conceptos.

Es importante que el profesor enseñe tanto conceptos matemáticos como la forma de expresarlos desde el principio de la escolarización de los alumnos. El conocimiento matemático se extiende más allá del vocabulario y se debe tomar muy en serio. “¿Cómo podemos expresar esta idea para que nos quede clara?” debería ser una pregunta común en cualquier clase de matemáticas.

Troy

Troy era "el típico chaval" que charlaba feliz con sus compañeros, pero no se inclinaba a hablar de sus ideas matemáticas. Cuando comencé a intentar incrementar la cantidad de discurso que implicaba a los alumnos en las lecciones, anoté lo siguiente: *Troy necesita que le obliguen a pensar. Cuando piensa tiene resultados favorables.* Era un chico muy agradable, pero su nivel era uno de los más bajos de la clase.

Un curso más tarde enseñé a los alumnos el teorema de Pitágoras al pedirles que dibujaran y midieran varios triángulos de ángulo recto con cuadrados creados de cada lado, o *"triángulos con cuadrados colgados de ellos"* como lo expresó uno de los chicos de la clase. Pedí a los alumnos que representaran su resultado y expresaran entre ellos la relación entre las áreas de los cuadrados. Después les enuncié el teorema de Pitágoras. Mientras hacían sus dibujos empleé el término "vértice". Advertí que *al comienzo de la segunda lección sobre el teorema de Pitágoras uno de los chicos, Troy, utilizó la palabra "vértice" que yo había recalcado durante la lección anterior. Había captado esta palabra y decidió utilizarla.* El modo en que empleé la palabra vértice, parecía haber capacitado a Troy para usarla en la siguiente lección. Troy empezaba a emplear el lenguaje matemático por su cuenta.

Más tarde, en la misma serie de lecciones oí a Troy usando una frase para el signo "igual" que parecía contener para él un significado más importante que el habitual.

Troy se dijo a sí mismo mientras trabajaba "si les añades dos cuadrados pequeños, es lo mismo que el cuadrado grande". Mientras decía esto, escribió $a^2 + b^2 = c^2$ *y escribía con firmeza las dos barras del signo igual mientras decía "es lo mismo que".*

La frase que Troy empleaba para denominar el signo "igual" parecía ayudarle a usar ese símbolo matemático en su tarea. Expresaba una relación que le permitía generalizar y transferir su conocimiento a muchos problemas diferentes. Troy hacía grandes avances. Descubría por primera vez, en varios años, que era capaz de usar las ideas matemáticas para resolver problemas. Recordaba y usaba el vocabulario correcto y aplicaba el teorema de Pitágoras a muchos problemas diferentes y difíciles. "Troy parece sentirse muy confiado con su trabajo; su trabajo evoluciona con rapidez", había anotado en mi diario de investigación.

El momento en que Troy descubrió cómo averiguar la información que necesitaba y aplicarla para resolver un problema de matemáticas fue decisivo. También empezó a ayudar a otras personas de la clase en lecciones posteriores. Había pasado de ser un "colega" que evitaba el trabajo a alguien que ayudaba a otros en su tarea. Troy comenzó a usar el vocabulario correcto en poco tiempo. Anoté que "tuve una larga conversación con Troy y con su amigo; usaban los nombres matemáticos correctos para las figuras de las que hablábamos."

Su capacidad para usar los términos correctos al expresar conceptos matemáticos parecía tener relación con un cambio de actitud respecto al cumplimiento de las tareas. Durante este período, Troy desarrolló varios trabajos independientes de investigación; estaban expresados de un modo claro y aceptable, mostraba sus ideas matemáticas y estaban bien organizadas.

Troy se volvió más confiado con las matemáticas, incluso llegó a verse como alguien que podía usar y dominar las ideas matemáticas. Aplicaba correctamente la terminología matemática y empleaba expresiones propias donde sentía que le eran más útiles. Era capaz de usar el lenguaje de la misma manera que alguien que "sabía" de matemáticas.

Planteamientos prácticos para usar en la clase

Ofrecer una explicación clara de una idea matemática

Muchas ideas matemáticas son difíciles de expresar por los alumnos pero es muy importante que lo intenten. Una de las razones por las que las matemáticas parecen tan difíciles de dominar es que los alumnos raramente se proponen exponer con claridad sus ideas.

Como ejemplo de cómo ayudar a los alumnos a expresar sus ideas matemáticas usaré una lección sobre la serie de Fibonacci. Esta serie aparece a menudo en las matemáticas escolares. Forma parte de lecciones muy interesantes, ya que contiene varios ejemplos que muestran cómo una serie matemática explica pautas que suceden de forma natural. La serie de números es así:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...

Tras una breve observación de estos números, la mayoría de los alumnos parecen tener una idea intuitiva de cómo se desarrolla la serie, sin embargo, ponerlo en palabras puede resultar más complejo. Pedí a los alumnos que empezaban a aprender a expresar sus ideas matemáticas que trabajaran en parejas para elaborar una frase corta que "explicara cómo funcionaba la serie de Fibonacci". Sugerí que apuntaran el vocabulario para estar seguros de las palabras que querían utilizar, pero no era necesario que escribieran. Esto es lo que dedujeron:

1 más 1 son 2, 1 más 2 son 3 y así sucesivamente hasta conseguir una secuencia.

Se suma el primer número para dar con el segundo.

Se suman los dos primeros números para dar con el siguiente.

Escribí cada una de las explicaciones en la pizarra, literalmente, tal cual me lo dijeron. La primera frase procedía de unos ocho grupos de alumnos, es decir, casi toda la clase optó por explicar la serie de una forma literal utilizando los números que la formaban. A continuación les pregunté cuál de las explicaciones describía mejor la serie de Fibonacci. Los alumnos respondieron que les parecía que la primera explicación era útil tan sólo al comienzo de la serie y que sabían que la serie podía continuar infinitamente. La segunda explicación incluía detalles más generales, pero en realidad no describía cómo calcular el siguiente número de la serie, y los alumnos preguntaron: "¿A qué añades 'el número que va delante'?" La clase pensó que la tercera definición era la "mejor" porque les decía exactamente lo que debían hacer y funcionaba independientemente del punto de la serie al que habían llegado.

Las respuestas dadas por los alumnos me hicieron comprender que sabían algo de las convenciones del registro matemático. Pudieron decirme que la tercera descripción era la "mejor" porque contenía suficiente detalle y era más genérica. Pese a que la tercera explicación no utilizaba el registro matemático de un modo convencional, ya que usaba términos personales, evolucionaba desde cómo los alumnos utilizaban el lenguaje de manera natural a la forma que se usa en matemáticas.

Se requirió a los alumnos que intentaran desarrollar una expresión clara de sus pensamientos para que sus pensamientos transitorios fueran más permanentes y, por tanto, les ayudaran a clarificar y a recordar las ideas matemáticas que estaban aprendiendo. También fueron involucrados en todo el proceso, elaboraron sus primeras decisiones, valoraron los diversos modelos que escribí en la pizarra y después decidieron cuál era la mejor explicación y por qué.

Me he preguntado, al repasar mis notas sobre esta lección, si debí dejar que escribieran sus frases en la pizarra, ya que entiendo que esto habría significado que era su propio

lenguaje lo que contemplaban. No obstante, en aquel momento, de no haber querido ellos mismos escribir sus explicaciones no lo habrían hecho, de modo que pedirles que además lo anotaran en la pizarra habría sido inapropiado. De cualquier forma, sí quise que las explicaciones quedaran escritas para tenerlas a mano durante la segunda parte del proceso, de modo que las escribí yo. Tuve que ser muy disciplinada mientras copiaba sus explicaciones en la pizarra para escribirlas exactamente como me las dictaban. La tentación de cambiar, abreviar o “corregir” el lenguaje fue muy fuerte. Era importante que yo aceptara su lenguaje y les permitiera articular sus ideas en lugar de adoptar otras formas de expresión. También podía haber introducido un “método de expresión matemática”, pero se habrían distanciado de su discurso y sentí que de ese modo estaría reforzando cualquier sensación que tuvieran de “no poder hacer matemáticas”. Al elegir la mejor explicación aportada por sus compañeros, los alumnos adquirieron modelos más accesibles, reforzando así la creencia de que con un poco más de esfuerzo podían usar el lenguaje matemático.

Al final de esta sesión, formularon sus explicaciones de otro modo y expresaron la serie de Fibonacci con sus propias palabras. La forma más generalizada de expresión, es decir, la más “matemática”, se convirtió en la que usaron para su propia explicación, al menos para esta lección.

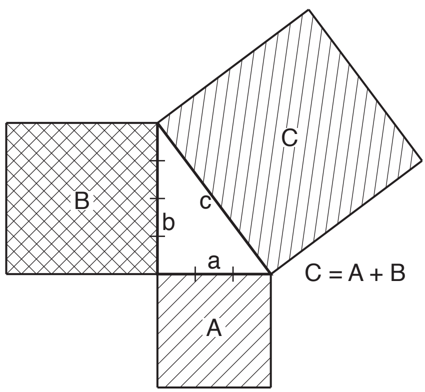
Corregir la redacción matemática de otro

Pedir a los alumnos que lean y corrijan la redacción matemática de sus compañeros contiene muchos beneficios de la idea anterior. De nuevo se describe mejor con la práctica, y en este caso fue con el teorema de Pitágoras. Hasta ahora la clase había trabajado bastante en ello y yo les pedí para tarea de casa que describieran por escrito el teorema de Pitágoras y cómo utilizarlo. Al comienzo de la siguiente lec-

ción recogí todos los cuadernos y los repartí al azar, mientras explicaba que iban a leer la descripción de otro compañero y que tendrían que corregir el trabajo y ayudarse a mejorar su redacción en caso de que fuera necesario. Di tiempo a los alumnos para leer las definiciones que les habían tocado. Les pedí que pensaran en una buena descripción del teorema de Pitágoras y en qué se parecería, para lo que les concedí un minuto. Los alumnos me contaron sus ideas sobre lo que contendría una buena explicación:

> Un diagrama que mostrara los cuadrados de los lados de un triángulo*.
>
> El teorema de Pitágoras utilizando las letras a, b y c igual que en el diagrama.
>
> Palabras que describieran para qué se podía utilizar el teorema de Pitágoras.
>
> Palabras que describieran cómo funcionaba el teorema de Pitágoras y qué elementos había que observar con atención.
>
> Dos o tres problemas diferentes que utilizaran el teorema de Pitágoras para hallar la respuesta.

Como se puede comprobar, la clase era muy exigente en cuanto a lo que incluiría una buena descripción. Les pedí que



* Procedimiento para el aprendizaje del teorema de Pitágoras. *(N. del R.)*

usaran este criterio para evaluar los trabajos que tenían delante. Recomendé que se dieran un tiempo para considerar qué criterio era correcto y que explicaran a su compañero por qué estaba bien. Una vez completado esto, les pedí que consideraran una manera de mejorar y que explicaran cómo hacerlo. Los alumnos lo realizaron correctamente y con esmero; adoptaron el rol de profesor con su compañero y se tomaron en serio este papel. Los cuadernos fueron devueltos a sus propietarios y empezaron a trabajar en el segundo borrador de sus descripciones. Los segundos borradores fueron mucho mejores que los primeros, pero cada uno seguía siendo individual. No copiaron lo que habían leído o visto, sino que utilizaron las ideas que se habían debatido o revisado para elaborar su propio trabajo competente. Aquellos alumnos que ya habían elaborado una buena descripción, mejoraron sus expresiones y concibieron ejemplos más competentes para demostrar el funcionamiento del teorema.

Recapacité sobre si los alumnos debían o no tener su propio criterio antes de pedirles que completaran las primeras descripciones. Creo que casi siempre los alumnos deberían obtener en primer lugar un criterio de evaluación, pero en este caso quise reunir el criterio de toda la clase, un proceso al que no estaban acostumbrados en esta etapa. Por tanto, parecía importante que pensaran un poco en cómo describir las ideas matemáticas involucradas en el teorema de Pitágoras, antes de decidir sobre el criterio a utilizar para obtener una buena descripción. Me aseguré de que tuvieran tiempo para integrar el conocimiento que habían obtenido del ejercicio de corregir entre compañeros para mejorar su trabajo, y de este modo poder ofrecer una definición muy clara del teorema de Pitágoras usando sus propias palabras.

El vínculo entre la Evaluación para el Aprendizaje y aprender a expresar las ideas matemáticas está claro en este caso. El ejercicio permite al profesor y a los alumnos saber hasta dónde llega su comprensión de un concepto y si

existen lagunas en dicha comprensión. Pero este conocimiento está disponible para el escrutinio público sólo si los alumnos son completamente capaces de expresar su entendimiento, y para hacerlo bien necesitarán ayuda. Yo, como profesora que observaba cómo desarrollaban todo el ejercicio llegué a conocer bastante tanto de los conocimientos que tenían los alumnos de Pitágoras como sobre el modo que les parecía más apropiado para describir este entendimiento. Me permitió utilizar estas observaciones para planificar futuras lecciones y debates sobre cómo usar el lenguaje para expresar conceptos matemáticos.

Saber qué palabras usar y llevarlo a la práctica

En casi todas las áreas de matemáticas es importante aprender tanto el vocabulario como la forma en que se utiliza. Los alumnos necesitan desarrollar este lenguaje para acostumbrarse al modo en que se usan las expresiones y para empezar a utilizar los términos matemáticos para definir la red de conceptos e ideas que abarcan esos términos. En la práctica esto significa que los alumnos necesitan verbalizar las palabras en voz alta y existen muchas maneras de conseguir esto. Para ello, apliqué un método que consistía en hacerles "cantar" la lección al estilo de la vieja escuela. Por ejemplo, en una clase sobre cuadrados y raíces cuadradas, pedí a los alumnos que se acercaran más a la pizarra donde había escrito las frases para cantar las palabras desconocidas conmigo. La lección continuó de la siguiente manera:

> Todos cantamos lo que había escrito en la pizarra: "Si 3 al cuadrado es 9 esto significa que la raíz cuadrada de 9 es 3"
>
> Entonces cantamos, "Si 7 al cuadrado es 49, entonces la raíz cuadrada de 49 es 7".

> "¿Qué significa raíz cuadrada?" pregunté.
>
> "Se multiplica por sí mismo para conseguir..." se aventuró a decir alguien.
>
> "¿Qué se multiplica por sí mismo?" pregunté.
>
> "El número".
>
> "¿Qué número?" pregunté, a lo que recibí miradas confusas.
>
> Les recordé la definición que estábamos buscando.
>
> "Multiplicas la raíz cuadrada por sí misma para llegar al original".
>
> "Entonces, ¿qué es una raíz cuadrada?"
>
> "Es un número que puedes multiplicar por sí mismo para dar con el número original", dijeron varias personas al mismo tiempo, y lo escribí en la pizarra.

Animé a los alumnos a "usar el registro matemático" de dos formas diferentes en esta lección. Les pedí que:

1. Vocalizaran las palabras, algo que a menudo no es fácil para ellos.
2. Pensaran en las palabras y frases que se usan para expresar estas ideas matemáticas.

Algunos alumnos se esforzaron solos para usar las palabras, pero tuvieron más éxito como grupo para crear una definición matemáticamente correcta de una raíz cuadrada. Les pedí que cantaran las palabras y formas de expresión para que todos tuvieran oportunidad de verbalizarlas, pero no me conformé sólo con eso. También les animé a pensar en las palabras y a que las transformaran para crear una definición inversa. En aquel momento, me produjo satisfacción que algunos alumnos elaboraran la definición de una raíz cuadrada, ya que todos ellos se habían esforzado al apoyarse mutuamente mientras la desarrollaban. Sin embargo, sabía que no podía dejarlo allí e insistí en solicitar a algunos alumnos que usaran las palabras que habíamos aprendido

juntos, para poder valorar cuánto habían aprendido y actuar de acuerdo con ello.

En ocasiones los alumnos ya conocen las palabras y las formas de expresión, sin embargo se muestran reticentes a usarlas. Mientras no utilicen las palabras ellos mismos, no hay forma de que ni el profesor ni el alumno estén seguros de que entienden por completo los conceptos que éstas indican. A veces se pueden superar estas barreras usando algo tan simple como un *brainstorm* ("tormenta de ideas"). La idea es incentivar a los alumnos para que sean ellos quienes sugieran las palabras, para que sea posible valorar si conocen las palabras y los conceptos asociados con los objetivos del tema, y dónde comenzar las actividades para añadir conocimientos a los que ya tienen.

Como ejemplo, introduje un tema sobre porcentajes al solicitar a la clase que escribiera en su cuaderno de ejercicios cuatro o cinco palabras que creyeran estar asociadas con los porcentajes. Hice esto para dar a los alumnos tiempo para reflexionar sobre su experiencia anterior y expresar lo que pudieran recordar. Uno o dos alumnos no escribieron nada. Anoté: "La mayoría consiguió escribir una o dos palabras, pero otros no pudieron ni empezar. No sabían lo que quería de ellos".

No había explicado con exactitud lo que quería que escribieran los alumnos, pese a que había manifestado mi deseo de saber lo que ellos recordaban. Pensé que la razón por la que algunos alumnos no habían escrito nada era porque se les pedía escribir palabras matemáticas, es decir, palabras que no formaban parte de su discurso social habitual y, por tanto, se sintieron inseguros. Todos los alumnos tuvieron tiempo para pensar en sus ideas sobre porcentajes aunque no las escribieran.

Reuní a los alumnos en la parte delantera del aula y les pedí que explicaran lo que habían escrito en sus cuadernos. Trasladé todas sus aportaciones a la pizarra de la misma forma en que las explicaron, sin redactarlas de nuevo. Cuando

advirtieron que todas sus ideas eran aceptables y que no había respuestas equivocadas o correctas, se mostraron más dispuestos a participar. Anoté lo siguiente:

> *Al tener en cuenta sus sugerencias, también hice un esfuerzo para incluir a los alumnos que en ocasiones no respondían. El ambiente mejoró bastante. Quizá empezaban a confiar en que yo aceptaba lo que decían y en que ellos mismos podían decir algo razonable. La tormenta de ideas, aceptar sus ideas y lo que aportaban, fue crucial en este caso. Era como decir: "puedes hablar como un matemático cuando aplicas lo que dices de una forma natural". La cuestión es aceptar su lenguaje sin corregirlo y después intentar avanzar con ello.*

Después de la tormenta de ideas completamos una tabla de fracciones equivalentes, decimales y porcentajes, en la que los alumnos usaron el lenguaje matemático para desarrollar su conocimiento sobre las conexiones que existen entre estos conceptos. No tuve que mostrarles la conexión entre los decimales y los porcentajes; ellos mismos desarrollaron una apreciación de la conexión en su discurso. La lección tuvo un resultado positivo al incluir a todos los alumnos en el desarrollo de las definiciones, porque podían verse y oírse unos a otros y todas las palabras y frases provenían de ellos. Les dejé claro que no buscaba respuestas correctas, sino averiguar lo que sabían y lo que no sabían, lo cual me permitió empezar a desarrollar otros conceptos basados en sus conocimientos actuales.

Pedir a los alumnos que se involucren en el texto

Los alumnos aceptan el estilo matemático convencional cuando leen cualquier publicación matemática y conocen el tipo de texto que es evidentemente matemático. Desde los

11 años en adelante, los alumnos utilizan su experiencia para valorar qué formas de expresión suenan más “matemáticas” que otras. El estilo convencional ha sido desarrollado de modo que exprese de manera clara y concisa las ideas matemáticas. Por tanto, si hemos de mejorar la habilidad de los alumnos para expresar sus propias ideas, es fundamental que se sometan al estilo matemático convencional.

Quise que los alumnos supieran que algunos libros de texto pueden ser muy difíciles de interpretar por la forma en que están escritos, pero con un poco de esfuerzo tampoco se trataba de una tarea imposible. Un método que descubrí para hacer esto, fue distribuir varios libros de texto que acumulaban polvo en la estantería y reunir a alumnos por grupos para investigar las propiedades de varias figuras cuadriláteras. Asigné una figura cuadrilátera —cometa, trapecio, etc.— a cada grupo y les dije que averiguaran en los libros lo que pudieran sobre esa figura. Podían haber usado sólo uno de los textos, pero cada uno ofrecía una información sustancialmente diferente de modo que sugerí que los leyeran todos y después aunaran las ideas que habían encontrado. Entendía que tal vez les pareciera difícil la investigación y no quería que copiaran de los libros de texto. Sugerí que discutieran minuciosamente todas las propiedades que averiguaran acerca de su cuadrilátero, para poder expresarlo de manera que el resto de la clase lo pudiera entender.

Después, cada grupo tuvo que hacer un cartel con todas las ideas que habían hallado acerca de su figura. Los carteles fueron expuestos y toda la clase examinó cuidadosamente cada uno de ellos. Frente a cada cartel había una hoja de papel. Pedí a los alumnos que anotaran en esta hoja cualquier idea que les impresionara y las dudas que tuvieran respecto a la figura y que el cartel no aclaraba. A continuación, los carteles fueron devueltos a los alumnos, quienes continuaron su labor para hallar las respuestas a

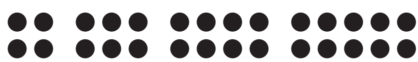
las preguntas que habían anotado en su cuaderno. Al comienzo de la clase siguiente, les pedí que pensaran en similitudes y diferencias y expusieran estas reflexiones en un cartel. Completaron su investigación y los carteles, y utilicé el cartel de las similitudes y las diferencias como estímulo para la reunión en la que hice preguntas intencionadas, para comprobar lo que habían entendido los alumnos sobre el lenguaje y los conceptos asociados con los cuadriláteros.

Al poner en práctica este proyecto pretendía que los alumnos adoptaran el estilo matemático convencional y expusieran las ideas que encontraban en los libros de texto para un público del nivel de sus compañeros. Se sintieron motivados para leer con atención el lenguaje utilizado en los libros y después expresar las ideas con sus propias palabras. Además, el ambiente favorecía el apoyo: si un alumno no entendía una frase en particular, los miembros del grupo podían ayudar y a menudo el proceso de pedir ayuda a otro favorecía su propia definición. Todo el grupo recibió aún más respaldo al asegurarse de que no habían dejado nada fuera, tanto al comprobar lo que otros habían averiguado sobre sus cuadriláteros como cuando otros alumnos les preguntaban y tomaban parte en la discusión de clase sobre las similitudes y diferencias que habían descubierto. Ambos planteamientos ayudaron a los alumnos sin restar autoría sobre los que habían producido. Habían explicado todas las propiedades de su cuadrilátero y lo habían hecho correctamente, pero el lenguaje que eligieron y el modo en que decidieron exponer las ideas fue producto de sus propias deliberaciones en grupo. Llevaron a cabo la investigación; se implicaron en el lenguaje convencional matemático y elaboraron un producto de alta calidad.

Pedir que los alumnos inventen nombres para conceptos matemáticos

El lenguaje matemático se usa para nombrar conceptos y conjuntos de ideas para que éstas puedan ser debatidas y usadas como modelos que proporcionan soluciones a problemas. Las matemáticas constituyen un sistema que provee orden, y por ello es importante que los alumnos usen los mismos nombres para las mismas ideas y conceptos. Sin embargo, a veces, al adquirir capacidad para usar el vocabulario y las frases necesarias para expresarse en las matemáticas que están aprendiendo, los alumnos pasan por alto el hecho de que alguien ya nombró esos conceptos y determinó cada una de las formas particulares de expresión en algún momento. Alguien, seguramente hace mucho tiempo, encontró una conexión evidente entre el nombre dado a un concepto y el discurso ordinario. Descubrí que al ayudar a los alumnos a entender la existencia de tal conexión, hacía que el uso del registro matemático les fuera menos desalentador.

Una técnica que usé para ayudar a los alumnos a saber que existía una conexión entre el registro matemático y el discurso ordinario, fue pedirles que contemplaran un dibujo de puntos que formaban cuadrados. El dibujo se ampliaba de esta forma:



Número del dibujo	1	2	3	4
Números en cada dibujo	4	6	8	10

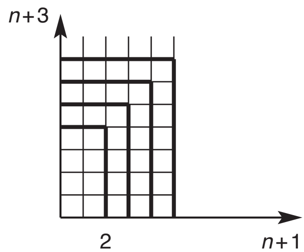
Los alumnos captaron con facilidad la idea de ampliar el dibujo de los cuadrados al añadir dos puntos para conseguir otro cuadrado en el dibujo de puntos y el siguiente número de la secuencia de números. La clase decidió que el nombre del dibujo debía ser “los números rectángulos de ancho 2”.

Entonces avancé a un dibujo similar que usaba los triángulos como su forma básica y nombramos el dibujo de números que resultó (esta vez “triángulos de ancho 2”). Después pedí a los alumnos que trabajaran en pares para concebir sus propios dibujos ampliables y usarlos para escribir las correspondientes series de números. Decidieron los nombres de las series de números. Mi sistema, involucrar a toda la clase en las decisiones sobre qué hacer a continuación, parecía haber capacitado a la mayoría para saber cómo proceder en su tarea.

Comprobé encantada algunas tareas innovadoras y bien explicadas en esta clase. Por ejemplo, Philip produjo números P, que son 6, 11, 16, 21, etc., que representaban el número de puntos que usó para hacer “Pes” de tamaños consecutivos. Angie produjo números Propeller que eran 1, 5, 9, 13, etc, y también escribió que “los números Propeller aumentan hasta 4 veces y disminuyen 3. Esto es $4n$-3’”.

Llewellyn produjo un dibujo de Números Brochi. Escribió, “Mi serie de números se puede deducir al añadir un cuadrado a cada línea. Esto se podría llamar Números Brochi. La fórmula es $(n+1)$ $(n+3)$”*.

Tamaño de Brochi	1	2	3	4	5
Número Brochi	8	15	24	35	48



* Representación serie Números Brochi. *(N. del R.)*

Ser capaz de nombrar un concepto matemático permite a los alumnos recordar dicho concepto, así como dominarlo y usarlo para resolver problemas matemáticos. Por ejemplo, en una clase sobre porcentajes los alumnos no podían recordar cómo deducir el 34% de 72 libras hasta que les recordé el término “fracciones equivalentes” que habíamos usado en la lección anterior:

> Pregunté “¿Cómo se deduce el 34% de 72 libras?”
>
> Murmuraron un poco pero no respondieron. Entonces pregunté: “¿Recordáis las fracciones equivalentes?” Los alumnos se mostraron dispuestos a responder y uno de ellos dijo, “Multiplicas 0,34 por 72”.

Por lo tanto, existen dos razones que explican el sentido de ayudar a los alumnos a entender que los nombres en el registro matemático son inventos humanos útiles:

1. Los alumnos se pueden ver a sí mismos como matemáticos que aportan ideas y nombres al discurso matemático igual que lo hicieron otros antes que ellos.
2. El nombre de un concepto evoca eficazmente la red de ideas que engloba un concepto y permite que se utilice.

Conclusión

En este capítulo he explicado la necesidad de organizar el aula para que todos los alumnos puedan verse y oírse; sobre la actitud en la clase en la que hablar sobre matemáticas es la herramienta preferida para aprender y sobre las ideas prácticas para empezar a desarrollar la habilidad de los alumnos respecto al lenguaje matemático. Hablar es vital en una clase; para la mayoría de la gente, hablar es una forma de pensar en los problemas y resolverlos. El modo particular

en que se comunican las matemáticas puede causar una barrera al aprendizaje de los alumnos porque necesitan aprender a expresar las ideas matemáticas antes de que puedan usar el discurso para apoyar su aprendizaje matemático. Al esforzarse para aprender conceptos matemáticos corren el riesgo de olvidar cómo deben hablar sobre dichos conceptos. Aprender a articular ideas matemáticas no sólo es una cuestión de adquirir vocabulario, aunque es cierto que usar palabras matemáticas forma gran parte de la expresión de ideas matemáticas. Los alumnos también necesitan usar formas de expresión que sean específicamente matemáticas; deben aprender a ser concisos, expresar el caso general en lugar del caso particular. Es necesario que busquen la pauta o el sistema que están estudiando y usar símbolos en lugar de palabras. La forma de expresión matemática o el registro matemático no combina bien con el discurso natural de los alumnos y, por tanto, éstos tienen que aprender a expresar sus ideas matemáticas de un modo apropiado en un lenguaje. Cuando los profesores de matemáticas ayudan a los alumnos y alumnas a desarrollar esta habilidad, el aprendizaje progresa de manera significativa.

Una de las razones más importantes por las que los alumnos aprenden a expresar sus ideas matemáticas es que, salvo que los profesores revelen información de suma importancia sobre lo que saben y entienden sus alumnos, no serán capaces de utilizar la Evaluación para el Aprendizaje. El siguiente capítulo se centra en la Evaluación para el Aprendizaje y describe cómo los alumnos que pueden expresar sus ideas matemáticas, son capaces de usar las herramientas de esta idea para alcanzar un nuevo nivel más elevado.

CAPÍTULO IV

Evaluación para el Aprendizaje

Introducción

La Evaluación para el Aprendizaje es un método para determinar el nivel de aprendizaje mediante el uso de pruebas para conocer el grado de comprensión de los alumnos. Cuanto mejor es la calidad de las pruebas para conocer lo que comprenden, saben o pueden hacer los alumnos, más precisa es la actividad modificada para conseguir un avance en su aprendizaje. Los alumnos revelan mucha información sobre su comprensión o dudas durante el diálogo en la clase, pero la información no revelada sólo será de una calidad lo bastante elevada si:

- se involucran en actividades o responden a preguntas que examinen a fondo su entendimiento,
- disponen de tiempo tanto para reflexionar en lo que ya saben, entienden o pueden hacer, como para expresar con detalle sus pensamientos,
- son capaces de usar el lenguaje matemático para comunicar con eficacia lo que saben, entienden o pueden hacer.

El aprendizaje de los alumnos se refuerza cuando la información revelada se utiliza para modificar la siguiente actividad de aprendizaje. Por ejemplo, la Evaluación para el Aprendizaje funciona en matemáticas cuando:

- los alumnos analizan un problema y descubren que pueden usar los conceptos matemáticos sin dificultad, y después continuan para encontrar un problema más difícil e indagar aún más en su aprendizaje,
- los alumnos corrigen una prueba en grupos y utilizan los resultados para establecer las tareas que tendrán que completar durante las siguientes lecciones y, de este modo, continuar con el perfeccionamiento de su comprensión,
- los profesores se sirven de asambleas para evidenciar la comprensión de los alumnos sobre un determinado tema al hacer preguntas y darles tiempo para discurrir las respuestas; utilizan los conocimientos sin revelar para planificar el siguiente módulo de trabajo,
- los profesores observan a sus alumnos cuando se involucran en una actividad y advierten que muchos de ellos no pueden hacer pleno uso de ciertos conceptos; recurren a los que han comprendido para que ayuden a los demás a mejorar su habilidad para utilizar dicho concepto.

El aspecto más importante de cada uno de estos ejemplos es que los alumnos tienen la oportunidad de manifestar lo que pueden y lo que no pueden hacer. Cuando expresan sus conocimientos, tanto el profesor como los alumnos pueden tener claro lo que entienden. Si se pretende aplicar eficazmente la Evaluación para el Aprendizaje, hay que tener en cuenta que los alumnos necesitarán aprender a usar el lenguaje matemático para articular sus ideas, así como disponder de tiempo suficiente para pensar en cómo expresarlas.

El objetivo de este capítulo será la Evaluación para el Aprendizaje. Daré por sentado que los alumnos estarán desarrollando alguna actividad para poner en práctica el discurso matemático, además de aprovechar las oportunidades en clase para usar la Evaluación para el Aprendizaje. He dividido el capítulo en cuatro secciones: objetivos de aprendizaje y criterios de éxito; preguntas y respuestas; retroalimentación; y autoevaluación y evaluación entre compañeros. Cada sección no es independiente, sino que cada una depende de las otras, pero para facilitar la explicación he enfocado cada área por separado. Explico cómo la desenvoltura de los alumnos con el lenguaje matemático contribuye al uso efectivo de la Evaluación para el Aprendizaje en cada área y cómo cada idea contribuye a su vez a desarrollar la capacidad del alumno para el lenguaje matemático. La Evaluación para el Aprendizaje exige que los estudiantes sean capaces de expresar abiertamente su pensamiento.

Objetivos de aprendizaje y criterios de evaluación

Instaurar el aprendizaje deseado para cada lección significa que los alumnos entenderán lo que van a aprender, y tanto el profesor como el estudiante podrán guiar el progreso de dicho aprendizaje. Todas las lecciones deberían contener objetivos claros de aprendizaje y criterios de éxito planificados con antelación y compartidos con los alumnos y alumnas.

Objetivos de aprendizaje

Existen muchas maneras de hacer referencia a una afirmación básica del aprendizaje buscado: propósito, objetivo, objetivo de aprendizaje, intención de aprendizaje. Dadas las opciones, prefiero elegir “intención de aprendizaje” por la flexibilidad implicada; se trata de lo que se pretende aprender

en esta lección, no lo que se debe ni lo que se podría aprender. Sin embargo, en Inglaterra, la Estrategia Nacional *(National Strategy)* ha optado por el término "objetivo de aprendizaje", por tanto parece razonable usar dicho término. La Estrategia de Nociones Elementales de Cálculo Aritmético Nacional *(The National Numeracy Strategy)* de Inglaterra ha dispuesto claros objetivos de enseñanza para las matemáticas hasta la edad de 14 años. Éstos deben ser traducidos a los objetivos de aprendizaje con respecto a una determinada lección que tienen en cuenta los objetivos del plan de estudios establecidos por el programa de estudios y exámenes del *National Curriculum* (Plan de Estudios Nacional) o por las propias ambiciones del profesor respecto al aprendizaje del alumno. También tienen en cuenta a los estudiantes: sus conocimientos anteriores, su capacidad para aprender y las diferencias en la clase. Los objetivos de enseñanza con frecuencia se exponen en un esquema de trabajo, pero los de aprendizaje son siempre específicos para cada lección en particular.

Un objetivo de aprendizaje tiene numerosos requisitos. El objetivo de aprendizaje debe:

- ser planificado con antelación, pero lo bastante flexible como para tener en cuenta el aprendizaje de los alumnos respecto a cada lección,
- ser compartido con los alumnos, por tanto lo lógico es planificarlo desde el principio en un lenguaje apropiado que puedan entender,
- ser mencionado con frecuencia durante las lecciones, por lo que deberá ser expresado en un lenguaje específico que los alumnos aprenderán a usar durante el curso,
- tratar de lo que van a aprender los alumnos, no de lo que van a hacer,
- tratar del aprendizaje que se debe hacer y no el contexto en el que se aprenderá,
- ayudar a los alumnos a entender las conexiones entre cada lección o entre diferentes partes de la lección.

Hay otras ideas que se deben considerar al establecer objetivos de aprendizaje. Por ejemplo, un objetivo de aprendizaje podría consistir en:

- una frase corta o una o dos frases,
- la "imagen global" o algo bastante específico, dependiendo de la lección en particular y dónde se sitúa en una sucesión de lecciones,
- cabe la posibilidad de que sea una "gran" pregunta que los alumnos aprendan a contestar,
- algo específico sobre una habilidad o concepto que se debe aprender o sobre la aplicación de dichas habilidades.

Para la mayoría, los objetivos de aprendizaje serán bastante escuetos. Muchos profesores prefieren registrarlos en su cuaderno de apuntes, una pizarra electrónica o sobre un tablero o un gráfico, y pedir a los alumnos que lo anoten también en sus libros, pero nada de esto es esencial. Es importante que los objetivos de aprendizaje se compartan con la clase y que se discutan al principio, durante y al final de cada lección, así como que los alumnos los consulten durante las clases. Aunque el nivel de cultura no es un problema, muchos profesores piensan que es de gran utilidad escribir su objetivo de aprendizaje donde los alumnos lo puedan ver, y de este modo evaluar su progreso durante la lección.

Criterios de evaluación formativa *

Los criterios de evaluación ayudan a los alumnos a comprobar su progreso respecto al objetivo de aprendizaje. El objetivo de aprendizaje a menudo será genérico; los criterios de evaluación siempre serán específicos según cada lección.

* La expresión que utiliza la autora en inglés es *succes criteria* (criterio de éxito de la tarea), pero como la fórmula más utilizada en nuestro contexto es "criterios de evaluación" optamos por mantener esta expresión. *(N. del R.)*

La Estrategia Nacional usa el término "resultados de aprendizaje", pero mis colegas me comentan que lo encuentran demasiado similar a los objetivos de aprendizaje y es difícil de entender por los alumnos. El término "criterios de evaluación" se explica en la obra de Shirley CLARKE (CLARKE, 2005) y parece adecuado; sin embargo, los profesores emplean diferentes expresiones para las mismas ideas, por ejemplo "método para...". O "lo que tenemos que hacer". Fundamentalmente, "los criterios de evaluación" se componen de una lista escrita para o por los alumnos, acerca del proceso que tienen que experimentar para aprender el objetivo con éxito. Los criterios de evaluación se comparten con los alumnos y deben debatirse de manera que lo puedan entender en profundidad.

Los criterios de evaluación deberían ser planificados con antelación para enfocar la lección con claridad. Si los profesores tienen una idea clara de lo que quieren que aprendan sus alumnos, y saben cómo demostrarles que han completado su aprendizaje con éxito, la actividad de aprendizaje cumple su función. Mientras que al principio esto parece trabajo extra, planificar los criterios de evaluación y la lección reduce el exceso de trabajo.

Los criterios de éxito deberían:

- ser planificados con antelación,
- ser compartidos con los alumnos y, por tanto, expresarse en un lenguaje apropiado para ellos,
- establecer el proceso a través del cual los alumnos consiguen cumplir con éxito el objetivo de aprendizaje, incluyendo aprender los términos y frases específicas,
- ser absolutamente comprendidos y utilizados por los alumnos (a menudo éstos ayudarán a establecer estos criterios de éxito).

Los alumnos deberían tomar como algo propio los criterios de evaluación y articularlos ellos mismos. En la medida en que sea posible, podrían ser dictados por los alumnos; esto refuerza la sensación de que están a su disposición. Los

criterios de evaluación permiten a los alumnos guiar y controlar su progreso a través del aprendizaje para que puedan saber lo que han aprendido con eficacia y buscar ayuda si tienen cualquier dificultad.

Los objetivos de aprendizaje y los criterios de evaluación deben capacitar a los alumnos para entender el aprendizaje que pretenden desarrollar y el progreso que hacen con dicho aprendizaje. Aquí expongo algunos ejemplos que han utilizado algunos profesores.

Utilizar objetivos de aprendizaje y criterios de evaluación

Objetivo de aprendizaje	*Criterios de evaluación*
Aprender el teorema de Pitágoras *	Sé lo que significa "triángulo de ángulo recto". He: dibujado con esmero 3 triángulos de ángulo recto. He dibujado un cuadrado a cada lado, asegurándome de que cada ángulo fuera un ángulo recto hallado el área de cada uno de los 3 cuadrados y los he señalado en una tabla preguntado a otra persona sobre las áreas de sus cuadrados y lo he anotado en mi tabla encontrado la relación entre las áreas de los cuadrados y lo he definido por medio del álgebra *(Continúa)*

* Véase nota en pág. 71. *(N. del E.)*

Para aprender más sobre los usos del teorema de Pitágoras	Conozco el significado de una raíz cuadrada. Puedo: exponer el teorema de Pitágoras y saber a qué lados del triángulo se refiere cada letra usarlo para y calcular la hipotenusa de 5 triángulos rectos diferentes con distintas orientaciones usarlo para encontrar el lado más corto de 5 triángulos diferentes utilizarlo para hallar la altura de 2 triángulos isósceles.

Es de señalar que los objetivos de aprendizaje indicados son bastante genéricos: para aprender el teorema de Pitágoras, o para aprender más sobre el teorema de Pitágoras. Sin embargo, dicho aprendizaje cumple su función. Al final de la lección un alumno podría preguntar:

"¿He aprendido el teorema de Pitágoras?"

Podrían responder ellos mismos al referirse al criterio de evaluación: "Sé que esto trata de unos cuadrados que cuelgan de los lados un triángulo de ángulo recto y sé que los dos cuadrados pequeños se suman al grande."

o

"¿Sé más acerca de cómo usar el teorema de Pitágoras?"

"Sí, puedo hallar la longitud de la hipotenusa de cualquier triángulo de ángulo recto que invente y también puedo hallar la longitud de los lados más cortos. ¿Y qué significa todo esto de los triángulos isósceles?"

Más ejemplos de modos de usar los criterios de evaluación

Objetivo de aprendizaje	*Contexto*	*Criterios de evaluación — pasos para triunfar*
Calcular porcentajes simples y usarlos para comparar proporciones simples	Estrategias de cálculo mental para apoyar el uso eficaz de una calculadora	Puedo: usar métodos mentales para calcular porcentajes simples al usar mi conocimiento y aplicarlo. Por ej., si el 10% de 40€ son 4€, puedo usar esto para hallar el 15% (la mitad de 10% es 5%, 10% más 5% = 15%), 25% (5×10% = 50%, después la mitad de esto)
Reconozco la equivalencia de porcentajes, fracciones y decimales		Puedo: convertir un porcentaje a un decimal para apoyar un cálculo, por ej., 12% de 45 = 0,12 × 45 o convertir el porcentaje en una fracción para ayudar al cálculo, por ej: 12% de 45 = 12/100 × 45
		(Continúa)

Comparar dos distribuciones simples usando el rango y la moda, la mediana o la media	Manejar datos Gran pregunta de Key Stage 3 (ver abajo)	Conozco el significado de la media, moda y rango. Puedo explicar y razonar por qué difieren dos distribuciones en relación a su moda, mediana y media y/o rango. Por ej., dos distribuciones tienen el mismo rango pero una tiene una mediana de 6 y la segunda una moda de 6. Soy capaz de proveer interpretaciones válidas de los datos.
La gran pregunta (de Key Stage 3) *Existen 100 valores en el conjunto.* *La media es 90.* *La mediana es 95.* Si incremento el valor más alto del conjunto de datos por 200. ¿Cuál es la mediana y la media del conjunto de datos?		

Otro profesor escribió el objetivo de aprendizaje en la pizarra y esbozó dibujos de los diversos pasos que darían los alumnos durante el debate y la valoración del objetivo. Todos los criterios de éxito dibujados fueron revisados a medida que la clase comprobaba que había completado los criterios.

Sea cual sea el proceso, la combinación de los objetivos de aprendizaje y los criterios de evaluación tienen un gran

poder para capacitar a los alumnos a conocer y ser capaces de articular:

- lo que están aprendiendo,
- cómo se conectan unas lecciones con otras,
- cómo progresan con el aprendizaje,
- cualquier dificultad con la que se encuentren,
- dónde necesitan concentrar sus esfuerzos para ampliar su aprendizaje.

Los objetivos de aprendizaje y los criterios de evaluación permiten a los alumnos progresar en su aprendizaje y a los profesores planificar actividades adecuadas para ampliar aún más este conocimiento. Ayudan a los alumnos a saber lo que están aprendiendo y cómo progresan, por lo que son vitales para que los alumnos sepan que aprenden eficazmente.

Preguntas y respuestas

Las preguntas enriquecedoras son importantes para instaurar la Evaluación para el Aprendizaje, estimulan el razonamiento de los alumnos, les ayuda a desarrollar conocimiento y les anima a expresar lo que saben. Los libros de texto tradicionales de matemáticas están repletos de "ejercicios progresivos", en los que los alumnos son invitados a completar a veces 10, casi siempre entre 20 y 30, preguntas similares que se vuelven ligeramente más difíciles hacia el final del libro. Por lo general, a los alumnos les gusta hacer estos ejercicios. Las preguntas requieren poco razonamiento; una vez que dominan el primer algoritmo los alumnos "giran la manivela y abren la puerta a las respuestas". El ejercicio da una falsa sensación de éxito; el alumno completa muchas preguntas y las hace todas correctamente, el libro contiene muchas casillas y esto satisface a

todos. Desgraciadamente, los alumnos suelen usar el algoritmo de un modo mecánico sin realmente entender lo que es y para qué sirve. Cuando se encuentran con un problema que no encaja en el patrón del ejercicio progresivo, el alumno no sabe cómo usar el concepto porque aún no lo domina.

En una ocasión denominé a aquellas preguntas (casi siempre las que aparecían al final de un ejercicio), que hacían pensar a los alumnos y transformar sus ideas sobre un concepto, "preguntas trampa". Decidí seleccionar esas preguntas y usarlas sólo tras una explicación inicial del concepto. Pedía a los alumnos que examinaran juntos todas las "preguntas difíciles", y consideraba que había sido una buena clase si revisaban sólo dos o tres en una lección, siempre y cuando esas preguntas les hubiera hecho pensar y hablar sobre el concepto y toda la red de ideas que lo englobaban.

Tuve el privilegio de observar una lección en la que el profesor hizo una pregunta planificada, y la conversación sobre esa preguntaba duró casi una hora. Durante ese tiempo la clase exploró y aprendió muchas cosas acerca del modo en que se corresponden los ángulos de un triángulo y la relación entre las longitudes de los lados de los triángulos. En cierto punto, esta clase (edad de 11 a 12 años) consideró ideas que alumnos mayores denominarían coseno. No pude ver ni un alumno desinteresado o que no aprendiera. Todos parecían disfrutar de la lección y sabían que habían aprendido eficazmente la geometría de los triángulos. También eran conscientes de que se habían involucrado en conceptos complejos y los habían dominado con eficacia. Esta sí era una sensación de éxito auténtica. ¿Cuál era la pregunta? La profesora mostró un ángulo agudo y explicó que formaba parte de un triángulo, después preguntó si el triángulo era escaleno, isósceles, equilátero o recto. No se trata sólo de la pregunta que se plantea, sino que los alumnos estén dispuestos a explorar nuevos conceptos, contemplar la pregunta de otra

forma, consultarse mutuamente y expresar sus ideas y pensamientos. La pregunta podía haber sido respondida con rapidez o examinada en profundidad; la labor de la profesora con la sesión de preguntas marcó la diferencia.

Plantear cuestiones que requieran ser exploradas, y después animar a los alumnos a pensar e investigar es una parte importante de la Evaluación para el Aprendizaje. Cuando se formula la pregunta adecuada se puede revelar gran cantidad de información sobre el entendimiento o las dudas de los alumnos respecto a un concepto, de manera que las siguientes experiencias de aprendizaje apropiadas se hacen obvias tanto para el profesor como para el alumno. Ayudarles a usar el lenguaje necesario para expresar los conceptos matemáticos garantizará que su comprensión de las ideas matemáticas no esté enmascarada por una incapacidad para comunicar sus pensamientos.

Concebir preguntas adecuadas para ayudar a los alumnos a aprender matemáticas puede ser problemático. Obviamente el lenguaje usado para hacer una pregunta debe ser claro y expresado en un nivel apropiado para la clase en cuestión. Asimismo, debe fomentar el uso adecuado del lenguaje matemático. Resumiendo, las preguntas útiles deben:

- explorar el rango completo del objetivo de aprendizaje en cuestión,
- originar reflexión,
- promover el debate,
- hacer conexiones entre diferentes áreas de matemáticas,
- basarse en
  - — el aprendizaje previo
  - — ideas generadas en la clase
  - — el objetivo de aprendizaje,
- proveer una oportunidad para profundizar en el pensamiento del alumno,
- explorar y exponer ideas comunes del día a día y dudas.

Favorecer el ambiente adecuado

El ambiente en la clase debe ser adecuado si los alumnos van a afrontar el reto, reflexionar y expresar sus ideas. En el Capítulo III he explorado muchos de los aspectos prácticos de establecer una actitud en clase que motive a los alumnos a articular sus pensamientos al responder a las preguntas. Aquí me extenderé en otros puntos que son importantes para ayudarles a pensar y a responder a las preguntas con las que aprenderán matemáticas.

Incentivar a los alumnos a apoyarse unos a otros para desarrollar un entendimiento común. Cualquier sensación de competitividad y de ser el primero en responder a una pregunta les involucra en el éxito y la mayoría de los alumnos fracasan. Ésta no es la actitud adecuada para alentar a todos a pensar y a contribuir al diálogo. Si la pregunta es compleja y requiere una reflexión profunda el profesor querrá que los estudiantes pongan en práctica las ideas que podrían funcionar, pero de igual modo, éstas podrían no funcionar. Los alumnos necesitarán asumir riesgos al contestar; deben saber que su contribución será valorada como un paso importante en el camino hacia el entendimiento. También necesitarán escucharse unos a otros y reflexionar sobre las aportaciones de sus compañeros. Todas estas ideas están fomentadas por una atmósfera de apoyo y destruidas en uno competitivo.

Tanto los profesores como los alumnos no deben tener miedo a explorar respuestas equivocadas. El ambiente en la clase debe valorar y explorar todas las respuestas para su contribución a un entendimiento común. Bien o mal, pueden ayudar a desarrollar conocimientos. Si una persona piensa en una determinada línea, probablemente habrá otros que piensen de la misma manera; por tanto, es importante explorar todas las respuestas y examinar cómo pueden ayudar a alcanzar una solución al problema en cuestión.

El profesor subraya que están buscando explicaciones e ideas. El profesor no espera "respuestas correctas", sino

explicaciones del proceso e ideas que puedan ayudar. Una sesión de preguntas ayuda a los alumnos a aprender en la medida en que les anima a pensar extensamente y con profundidad. Cuantos más alumnos continúan explorando los conceptos y dificultades de la pregunta, más podrán usar y dominar las ideas matemáticas: más aprenderán. La reflexión será fomentada por los profesores a continuación de las respuestas, ya estén "bien" o "mal", con preguntas como "¿Por qué piensas eso?" y "¿alguien quiere añadir alguna otra idea sobre esto?" de modo que todas las respuestas sean examinadas de manera exhaustiva. En matemáticas cabe la posibilidad de dar la respuesta "acertada" por el motivo "equivocado", así como la respuesta "equivocada" para la pregunta "correcta". Si se examinan todas las respuestas es probable que ninguna de estas dificultades evite que los alumnos aprendan matemáticas con éxito.

El aprendizaje de las matemáticas será reforzado por el diálogo sobre los vínculos entre lo que a menudo parecen pedazos compartimentados de conocimiento. Los profesores hablan con frecuencia de enseñar multiplicación o cuadriláteros o expansión de paréntesis, y raramente piensan en enseñar matemáticas. Las matemáticas constituyen una búsqueda sistemática de patrones que se pueden usar para modelar al mundo de manera concisa. El álgebra es un buen ejemplo; las letras que los alumnos encuentran tan difíciles a menudo se consideran entidades en sí mismas en lugar de símbolos que determinan patrones de comportamiento de incógnitas. Si los alumnos se acostumbran a pensar y hablar de los vínculos entre diferentes temas de matemáticas, así como de lo que es similar y de lo que es distinto sobre cierta área, estarán aprendiendo a usar el sistema matemático.

Es esencial esperar un tiempo. Si los alumnos deben responder a una pregunta con algo más que una simple respuesta, hay que darles tiempo para pensar. Si deben responder lo que realmente piensan, conocen o recuerdan necesitarán de

3 a 5 segundos durante la sesión de preguntas a toda la clase, o de 30 segundos a 1 minuto si tienen que hablarlo con su compañero. Muchas personas prefieren llamar al "tiempo de espera" "tiempo para pensar" porque es un tiempo aparte para pensar.

Las lecciones se centran en el aprendizaje de los alumnos y no en cumplir los objetivos a cualquier precio. Al principio, cuando los profesores empiezan a pensar en usar las preguntas para explorar la comprensión de los alumnos, con frecuencia les preocupa no completar el temario. En Inglaterra existe el *Numeracy Framework* (Marco de Nociones Elementales de Aritmética) en el que se recomienda a los profesores que cumplan lo que establece el *National Curriculum* para impartir el contenido y el número de lecciones para cada asignatura. La Evaluación para el Aprendizaje requiere que los alumnos inviertan todo el tiempo que sea necesario en estudiar y aprender con éxito un objetivo de aprendizaje. Los alumnos empiezan a adoptar métodos efectivos para entender las matemáticas y aprenden mejor, y por tanto aprenden más en menos tiempo. Los profesores que utilizan la Evaluación para el Aprendizaje me han comentado que incluso si tienen que pasar más tiempo de lo planeado en un tema lo compensan en otra área.

Los alumnos necesitan más tiempo para acostumbrarse a la demanda de respuestas que requieren algo más que una simple contestación, así como para pensar y explorar conceptos. Para empezar, es importante estar preparados para comprobar que la clase aprende más despacio. Los alumnos tardan más en asimilar las matemáticas, pero aprenden técnicas de aprendizaje más efectivas. Cumplir un objetivo sin entenderlo no tiene sentido, y puede ser contraproducente, ya que los alumnos creerán que no pueden tener éxito en el aprendizaje de las matemáticas.

Sin levantar la mano, todos deben estar preparados con una respuesta. Si la clase ha de ser una comunidad en la que se piensa, se habla y se aprende, el profesor querrá

generar una atmósfera en la que todos estén dispuestos a presentarse voluntarios para ofrecer su opinión sobre un problema, y en la que todas las aportaciones sean valoradas. Por tanto, presentarse voluntario para responder normalmente no será necesario, ya que el profesor querrá elegir quién inicia la conversación y gestionar las intervenciones de manera que todos los puntos de vista sean escuchados.

No es fácil empezar a aplicar este método cuando los alumnos están tan acostumbrados a alzar la mano. Los profesores a veces les hacen sentarse sobre las manos hasta que haya pasado el "tiempo para pensar". Una vez que el diálogo se ha establecido apropiadamente, ha llegado el momento de aplicar las normas naturales de conversación y los alumnos piden su turno como hacen los adultos para participar en el diálogo. Sin embargo, es útil empezar con ello para recordarles que en matemáticas ahora las normas son diferentes. Otra idea útil es requerir a los alumnos que levanten la mano cuando deseen hacer una pregunta, pero no para responder. Entonces, si se alza una mano el profesor pide al alumno que exponga su pregunta y esto les recuerda enseguida las nuevas normas.

"Sin levantar la mano", exige que todos tengan preparada una respuesta; por tanto, hay que formular a los alumnos una pregunta a la que todos puedan responder. "¿Qué piensas de...?" y "¿qué sabes de ...?", pueden ser temas útiles para empezar, ya que la respuesta sería "yo pienso que es..." sería correcta si eso es lo que piensan honestamente. "Sin levantar la mano" también permite suficiente tiempo para pensar, de modo que las respuestas serán lo que realmente piensan o saben los alumnos y no sólo una reacción impulsiva.

Si un profesor adopta la norma "sin levantar la mano" en su clase los alumnos tendrán mayor facilidad para escucharse mutuamente y al profesor. En una clase en la que se habla y se aprende, los alumnos y el profesor deben escucharse

unos a otros y usar las ideas que otros expresan para ayudarles a aprender. Al principio el profesor puede usar temas como: “¿Qué opinas sobre lo que ha dicho (nombre)?”, “¿puedes añadir algo a la respuesta de (nombre)?” y “¿qué comentario harías sobre lo que ha dicho (nombre)?” para animar a los alumnos a escucharse mutuamente y sacar conclusiones sobre las respuestas de sus compañeros. Cuando los alumnos se acostumbran a esta forma de trabajar, la mayoría de los profesores advierten que éstos siempre quieren comentar o aportar algo sobre la observación de otro compañero, ya que comprenden que esta es una buena herramienta de aprendizaje.

Formas prácticas de crear preguntas y actividades enriquecedoras

Una vez que las condiciones de la clase son idóneas para explorar respuestas y hablar sobre las ideas, los profesores necesitarán preguntas y actividades que motiven la reflexión. Las siguientes ideas son planteamientos para buscar y utilizar preguntas que estimulen el pensamiento enriquecedor.

Plantear una pregunta que no funciona o donde no se esperan respuestas. Los alumnos esperan que todas las preguntas tengan respuestas sencillas, por tanto en su esfuerzo por encontrar una respuesta clarificarán cualquier duda.

Ejemplos:

1. $a + 2b = 12$
   $5a = 20$
   Los alumnos no esperan que a y b tengan el mismo valor y por tanto se esfuerzan por hallar un valor diferente para b.
2. En los cursos de edades comprendidas entre 14 y 16 años puede ser útil plantear una pregunta de geometría que no se pueda resolver usando triángulos de

ángulo recto. Mientras los alumnos examinan el problema y descubren que no pueden solucionarlo simplemente con ayuda de las herramientas que ya tienen, revelarán la necesidad de las reglas del coseno o del seno. Aportarán dichos conceptos al contexto, y establecerán cuándo necesitan usar reglas complejas y cuándo las ideas más sencillas serán más aconsejables.

Hacer preguntas de un modo diferente al acostumbrado. Se trata de realizar preguntas a los alumnos para concentrar la completa red de ideas que forman un concepto y usarla de forma diferente. Si los alumnos dialogan y examinan juntos estas ideas usarán los conceptos con mayor convicción. De esta manera, los profesores pueden pedir a los alumnos que afronten los trabajos complejos al contar con diversos tipos de apoyo. Si evitamos que éstos exploren diferentes maneras de usar los conceptos o esperamos que sólo los mejores aborden los problemas “difíciles”, los profesores no podrán ayudar a la mayoría a adquirir seguridad en la aplicación de las matemáticas.

Ejemplos:

1. La media de 5 números es 8. Sabemos que cuatro de los números son 4, 10, 15 y 6. ¿Cuál es el número que falta?

2. Todas estas multiplicaciones son aproximadamente iguales a 1.600. ¿Cuáles de ellas son menores que 1.600 y cuáles son mayores que 1.600?

42 × 41	44 × 43,2
38,2 × 39.7	38 × 44
37 × 40,3	420 × 3,7

a) Justifica tus respuestas.

b) Inventa 5 productos más que sean más o menos equivalentes a 1.600.

c) ¿Qué pasa con 44 × 36? ¿Por qué es difícil de deducir?

Usar de tres a cinco preguntas que engloben ideas sobre un tema con objeto de generar un diálogo sobre ellas. Escoger con cuidado de tres a cinco preguntas que enseguida desafíe las ideas de los alumnos sobre el concepto que están aprendiendo no es una tarea fácil, pero garantiza que investiguen y revisen sus dudas. Para algunos profesores, puede resultar novedoso que los estudiantes sólo completen de tres a cinco preguntas en una lección, pero es importante. Si las preguntas se escogen con cuidado, y son examinadas y argumentadas en grupo, los alumnos obtendrán una sensación de éxito real al conocer todo acerca de un concepto.

Trabajo en grupos reducidos

Las preguntas que estimulan a los alumnos a hablar de sus ideas y ayudarse entre ellos no tienen por qué plantearse a toda la clase. En ocasiones, las preguntas toman forma de actividades en grupos reducidos. Se debe informar a los alumnos que el objetivo es que expresen sus ideas, usen el lenguaje matemático y trabajen juntos para resolver problemas. El profesor necesitará observar detenidamente, mientras los alumnos trabajan, si pretende hacer del trabajo en grupos reducidos un proyecto para la Evaluación para el Aprendizaje. A continuación enumero algunas ideas.

Escribe en una tarjeta algunas preguntas que cubran varios aspectos de un tema, usando las preguntas de examen si es apropiado. El esquema de las preguntas se puede escribir sobre unas tarjetas de colores que los alumnos podrán consultar cuando lo deseen. El propósito del ejercicio es ayudarles mientras aprenden a resolver problemas complejos. Trabajan juntos para dialogar sobre cómo y el por qué de un proceso hasta llegar a una solución correcta.

Pedir a los alumnos que examinen el plan de estudios, el programa o el esquema de trabajo y decidan en qué temas necesitan profundizar más. Señala dónde pueden encontrar información sobre esos temas e invítales a escribir sus propias preguntas y a trazar un esquema. Solicita a los alumnos que hagan preguntas a otros grupos y después corrige las respuestas con ayuda de su esquema de correcciones. Aprovechar esta idea permite que dos grupos exploren en profundidad las dificultades de un tema en particular, útil para revisión, pero también en un tema en el que existen diversas categorías para explorar o donde es recomendable ofrecer trabajos diferenciados, tipos de triángulo, gráficos de estadística, etc.

Explorar los vínculos entre preguntas en un ejercicio estándar. Hacer uso de los viejos libros de texto de la estantería; pedir a los alumnos que contemplen las preguntas e investiguen por qué el libro plantea determinadas cuestiones, qué sistema se ha utilizado para que las preguntas posteriores sean más difíciles o en qué consiste el reto de la pregunta. Invita a los alumnos a escribir sus preguntas para crear un ejercicio similar, pero posiblemente más interesante. Esta idea es muy útil con aquéllos que tienen éxito en el aprendizaje de las matemáticas, sobre todo en edades comprendidas entre 12 y 13 años, aunque lo he visto usar eficazmente con algunos más jóvenes, a quienes no les resultan fáciles las matemáticas. Anímales a explorar y expresar ideas matemáticas; esto les motiva a aprender.

El hilo común que une todos estos planteamientos es hacer que los alumnos piensen en todos los aspectos del concepto y observen, articulen, y utilicen toda la compleja red de ideas que lo engloba. La vía tradicional de aprendizaje para trabajar un aspecto y después otro más difícil, y a continuación otro, puede llevar a que piensen que todos estos aspectos son distintos y que están desvinculados. El alumno necesita estudiar todos estos aspectos diferentes, pero mantener una visión general de todo el concepto es

igual de importante. Una forma de conseguirlo es hacer la "Gran Pregunta" con la que al principio los estudiantes tendrán muy pocos recursos para resolver. En la medida en que aprendan nuevos conceptos podrán explorar más la "Gran Pregunta" hasta que la puedan resolver e incluso inventar sus propias "Grandes Preguntas" para que las solucionen sus compañeros.

Retroalimentación

La retroalimentación es un componente vital de la Evaluación para el Aprendizaje. Los alumnos pueden saber lo que han hecho bien y cómo continuar mejorando su aprendizaje cuando reciben retroalimentación. Los alumnos reciben retroalimentación de muchas maneras, de repente con una frase como "Esa es una buena forma de explicarlo", de un compañero o con una retroalimentación formal de un profesor entregado por escrito. Los objetivos de aprendizaje y los criterios de evaluación permiten a los alumnos proveer su propia retroalimentación sobre el éxito de su aprendizaje y saber qué camino tomar para mejorarlo. En una clase en la que los alumnos hablan acerca de sus ideas matemáticas, la retroalimentación de su aprendizaje se convierte en parte del discurso vigente.

Esto no sugiere que la retroalimentación siempre favorezca el aprendizaje. Tan sólo es educativo (es decir, apoya la enseñanza), si la información recibida por el estudiante la utiliza para mejorar su aprendizaje. La retroalimentación no comprendida por el alumno no se puede aprovechar porque no hay tiempo para ello, y no mejora el aprendizaje por muy práctica que pretenda ser. Por consiguiente, la retroalimentación escrita y entregada al final del módulo de trabajo no es educativo porque el alumno no puede utilizarlo para mejorar los resultados de su aprendizaje. Tampoco basta con retroalimentar al alumno cuando no ha entendido o ha encontrado

dificultades. Para que el resultado sea educativo hay que indicarle cómo mejorar; es decir, sugerirle medidas específicas que él pueda adoptar y que debe aplicar.

La obra de Ruth BUTLER (1988) muestra que es importante separar los comentarios de las notas y puntuaciones si el propósito de los profesores es mejorar el aprendizaje. Proporcionar notas junto con los comentarios destruye por completo los efectos favorables de estos últimos. El uso tanto de las notas como de los comentarios probablemente sea la forma más extensa de retroalimentación utilizada en el Reino Unido. Este estudio y otros similares muestran que esta práctica, que además ocupa tanto tiempo del profesor, no ayuda a los alumnos a aprender. Cuando se pone una nota a un alumno se enfoca en su rendimiento en lugar de en su aprendizaje, y esto puede desmotivar o fomentar la autocomplacencia. Si un alumno recibe buenas notas de forma regular se vuelve complaciente ya que no hay nada que indique que necesitan continuar esforzándose para aprender. Las notas bajas pueden convencer a los alumnos de que no pueden "hacer" matemáticas, de modo que llegan a creer que no merece la pena intentarlo. Los comentarios, sin notas ni puntuaciones, pueden identificar lo que se ha hecho bien y señalar cuáles son los próximos pasos a seguir en su aprendizaje. Todos los alumnos pueden obtener un comentario sobre su trabajo de modo que todos, independiente de en qué punto estén, progresan en el aprendizaje.

¿Qué es una retroalimentación efectiva?

Una retroalimentación efectiva ayuda a los alumnos a saber cómo pueden progresar en su aprendizaje. Esto quiere decir que a veces la retroalimentación más efectiva para un estudiante es un comentario que le permita reflexionar un tiempo y posiblemente hablar sobre la tarea que tenga que completar, tal como ocurre en el siguiente ejemplo.

Cuando se indica a un alumno una nueva tarea, pide ayuda inmediatamente. Cuando el profesor pregunta: "¿Qué es lo que no puedes hacer?" es común escuchar la siguiente respuesta: "No puedo hacer nada". La reacción del alumno puede estar causada por ansiedad debido a la naturaleza desconocida de la tarea, por lo que el apoyo ofrecido podría ser algo como "Copia la tabla y volveré en cinco minutos para ayudarte a completarla." A menudo esto es todo el apoyo que necesita el estudiante. Copiar le obliga a fijarse con detalle en la exposición de la tabla, y este "trabajo que le mantiene ocupado" le proporciona tiempo para razonar el problema él sólo. De este modo, al darle al alumno permiso para tomarse un tiempo para pensar, el profesor facilita un camino para que el alumno avance en su aprendizaje.

Existen tres condiciones para que la retroalimentación sea efectiva. Ya sea oral o escrito, los alumnos deben conocer:

1. los objetivos de aprendizaje y los criterios de éxito de la tarea,
2. el punto al que han llegado respecto a los objetivos de aprendizaje y los criterios de éxito,
3. el modo de prosperar en la consecución de los objetivos de aprendizaje o cómo llenar el espacio entre lo que han hecho y lo que podrían hacer.

La retroalimentación oral antes descrita cumple estas condiciones siempre y cuando se asuma que el profesor se ha asegurado de que el objetivo de aprendizaje y los criterios de éxito han quedado claros y que el alumno ha evaluado el objetivo que ha logrado alcanzar (en este caso, "no puedo hacer nada"). El profesor aporta la tercera condición: cómo evolucionar hacia la consecución del objetivo de aprendizaje. La retroalimentación no tiene por qué ser prolongada para ser efectiva, pero sí debe ayudar a los alumnos a progresar en su aprendizaje.

No obstante, las tres condiciones tienen también sus dificultades cuando un profesor intenta proveer una retroalimentación efectiva. Anteriormente, yo ya había establecido objetivos de aprendizaje y criterios de éxito. Uno de los motivos por los que los criterios de éxito son tan importantes es porque permiten que los alumnos sepan hasta dónde han prosperado. Es de vital importancia que los estudiantes sepan que son competentes, ya que sólo entonces comprenderán que merece la pena continuar intentando mejorar. Los criterios de éxito les permiten trabajar en lo que ya han conseguido, por tanto esto ya es un logro. Cuando los alumnos realizan un esfuerzo para aprender, éste es recompensado de inmediato al consultar los criterios de éxito. Cuando utilizan de manera rutinaria el lenguaje para expresar sus ideas, son capaces de expresar en qué medida han adquirido los criterios de éxito y, por consiguiente, tanto el profesor como los alumnos comparten la gratificación inmediata del éxito. Cuando alumnos y alumnas no puedan expresar sus conocimientos, el reconocimiento de un aprendizaje eficaz, en el mejor de los casos, se postergará y esto minará su efecto.

Un comentario que pormenorice lo que se ha aprendido con éxito es un comienzo importante, pero debe acompañarse de una explicación sobre lo que tiene que hacer el alumno para mejorar. Las frases de estos comentarios de "mejora" son importantes. Tras el comentario el alumno debe saber qué labor tiene que desarrollar y cómo llevarla a cabo. La forma exacta de conseguirlo depende del profesor, el alumno y la situación. Algunas sugerencias incluyen comentarios que:

- recuerdan al alumno el objetivo de aprendizaje o determinados criterios de éxito; sobre todo estos son adecuados para buenos estudiantes, por ejemplo:
  — *recuerda lo que ocurre cuando multiplicas dos números negativos,*

— *añade una explicación de cómo hallar la misma raíz cuadrada para completar tu respuesta,*
— *has olvidado multiplicar por los coeficientes de ×,*

- canalizan las respuestas de los estudiantes; el profesor decide qué método será mejor para capacitar a los alumnos a solucionar eficazmente el problema y les conduce hacia el mismo; puede hacer preguntas que les permitan discurrir la respuesta; los profesores a menudo optan por escribir la solución con espacios en blanco para que la complete el alumno y a continuación proponen otro problema para que lo resuelvan de la misma forma:

— *Usa las técnicas de partición para este problema.*
— *¿Crees que la longitud de este lado está bien? ¿Debería ser más largo o más corto que los demás lados? ¿Cómo se usa el teorema de Pitágoras para hallar un lado más corto?*
— $(2\ \ - 3)\ (3\times + 4) = \underline{\quad}\times^{2} + 8\times - 9\times - \underline{\quad} = \underline{\quad\ }$, ahora multiplica $(2\times - 4)\ (3\times + 2)$,

- ponen un ejemplo y después piden al alumno que escoja un modo de usarlo:

— *Usa una tabla para calcular los valores de tus gráficos. ¿Qué números escogerás para × cuando dibujes tus gráficos?*

×	– 5	– 1	0	2
y = *×* + 3	– 2	2		

— *Describe lo que ocurre cuando el valor de × aumenta. Cada término siguiente será algo como "el doble del anterior", "tres más que el anterior", "tres veces más que el anterior más uno".*

Este tipo de comentarios no son exhaustivos en absoluto; sin embargo, los comentarios deben:

- estar orientados a metas de aprendizaje, no a los alumnos,
- tratarse del aprendizaje que se lleva a cabo, no sólo de la presentación,
- ser claro en cuanto a lo que ha conseguido el alumno y lo que aún necesita afianzar para mejorar,
- exigir una respuesta de los alumnos y exponer la pregunta de manera que sepan responder.

Es importante recordar que de la investigación deduje que la retroalimentación empeora los resultados cuando se centra en la autoestima, tal es el caso con las notas y con algunas formas de recompensa (DWECK, 2000, KLUGER y DENISI, 1996). El uso de los elogios puede incrementar la motivación, pero entonces es necesario usar el elogio todo el tiempo para mantener esa motivación y llega un momento en el que se hace difícil que sean considerados como algo genuino y sincero. Es importante valorar específicamente el esfuerzo del alumno por aprender, sobre todo lo que ha aprendido correctamente, ya que esto también aumenta su motivación para continuar aprendiendo. El progreso de los resultados de las tareas proviene de una retroalimentación encauzada a las medidas necesarias y detalles específicos sobre cómo mejorar.

Una vez proporcionada la retroalimentación aún hay otro paso necesario para que sea del todo educativo; el alumno debe actuar o reaccionar a la retroalimentación. Una vez más, esto es cuestión de tiempo. Sin tiempo para leer y responder a la retroalimentación por escrito, los alumnos no apreciarán sus beneficios. Por tanto, cuando los profesores hayan “corregido sus cuadernos” deberán asegurarse de que en algún momento durante la siguiente lección, probablemente al principio, los alumnos lean y empiecen a responder

a las recomendaciones que se les haya dado para mejorar. Dependiendo del comentario, los alumnos podrían:

- comprobar si entienden el comentario del profesor y escribir una respuesta como tarea de casa,
- leer el comentario y responder de inmediato, ya que esto les llevará poco tiempo,
- leer el comentario y hacer un nuevo borrador del trabajo ya iniciado utilizando las recomendaciones para mejorarlo,
- leer el comentario y, si se sienten inseguros sobre cómo responder, decidir hablar con un compañero para asegurarse de que lo entienden todo,
- leer el comentario y completar dos o tres problemas similares para mostrar que han entendido la sugerencia,
- encontrar los errores que han cometido en su tarea y escribir una respuesta al profesor que demuestre que entienden dónde han fallado.

Dar a los alumnos retroalimentación por escrito y de forma efectiva siempre llevará más tiempo que el convencional "rapapolvo intercalado con alguna que otra alabanza", tal como una alumna describía este estilo de evaluación. Sin embargo, el estilo corrector de los "rapapolvos" no tiene ninguna función de aprendizaje, mientras que un comentario que establece lo que se ha hecho bien y cómo han de continuar para mejorar, ayudará a los alumnos a aprender matemáticas de una manera más efectiva. Es preciso recordar que en una clase que se centra sólo en el lenguaje para aprender matemáticas, los alumnos reciben mucha retroalimentación durante gran parte del tiempo. Cuando arriesgan una opinión en el diálogo de clase o de grupo averiguan de inmediato si es recomendable o no tomar nota de otras ideas. Mientras intercambian impresiones con unos y con otros "oirán" sus propios pensamientos y ésta

es una valiosa forma de comprobar que sus ideas tienen sentido. Al pensar y hablar sobre su aprendizaje, los alumnos reciben retroalimentación con regularidad de su profesor y sus compañeros en el momento oportuno, es decir, mientras se esfuerzan por comprender un concepto. Sin embargo, en las escuelas también se exige retroalimentación por escrito, puesto que es una forma de garantizar que todos reciban consejos sobre cómo avanzar en su aprendizaje. Por tanto, es necesario encontrar tiempo. Los profesores han concebido muchas soluciones para encontrar suficiente tiempo para una retroalimentación efectiva. Éstas incluyen:

- dar a los alumnos retroalimentación por escrito cada tres semanas, pero asegurándose de que todos reciban buenos consejos junto con la retroalimentación,
- planificar con precisión qué partes de la tarea se deben entregar por escrito y cuáles se corrigen en clase; el trabajo que recibe retroalimentación del profesor a menudo se denomina como "partes clave de las tareas",
- escribir comentarios solamente cuando los consejos marquen una clara diferencia respecto al aprendizaje de los alumnos, es decir, cuando éstos tengan el tiempo y la oportunidad para tomar medidas respecto a los comentarios recibidos,
- poner nota al trabajo de rutina en la clase y ocupar el tiempo sólo en los trabajos que realmente exploren el aprendizaje que ha hecho el alumno,
- dialogar con los alumnos acerca de conceptos valiosos; parte de esto implicará observar, asesorar y comentar la calidad del trabajo de otros,
- poner nota al trabajo en grupos reducidos; los alumnos establecen una serie de respuestas modelo para investigar o bien si sus propias respuestas son las mismas que las respuestas modelo y están bien, o

son diferentes pero correctas, o son diferentes y de alguna manera incorrectas; a continuación tendrían que establecer ellos mismos los siguientes pasos de su tarea.

Compañeros y autoevaluación

La evaluación entre compañeros y la autoevaluación son métodos importantes de valoración que implican a los alumnos en el diálogo acerca de su aprendizaje, por consiguiente, les ayuda a ser autocríticos e independientes. Esto no sustituye la corrección y la retroalimentación del profesor. Al igual que en todas las áreas del aprendizaje de matemáticas, los alumnos necesitan aprender a comentar lo que han aprendido, usar el lenguaje y las expresiones habituales para valorar las tareas de otros compañeros, y discutir problemas y estrategias con ellos. Esto llevará tiempo y esfuerzo, pero las recompensas merecen la pena. Es preciso que el alumno adopte un papel activo para elogiar y después llenar la laguna entre lo que entienden desde el principio y el objetivo de aprendizaje, lo que significa que una enseñanza eficaz debe involucrar la autoevaluación del alumno.

La práctica de verbalizar las ideas y conceptos hace que dichas ideas sean propensas a recibir retroalimentación, bien del profesor y los compañeros, o incluso de ellos mismos. Dado que la retroalimentación es sobre el objetivo de aprendizaje, identifica lo que se ha hecho bien, revela formas de mejorar y contribuye a un mayor aprendizaje. La evaluación entre compañeros refuerza la asimilación de técnicas para evaluarse ellos mismos y provee una fuente rica de ideas que los alumnos pueden aplicar en su propio aprendizaje. Cuando un grupo de estudiantes se implica en la evaluación entre compañeros, habla de las ideas matemáticas, por tanto desarrolla y comparte definiciones sobre las mismas. Cada miembro del grupo participa en la expresión de ideas y

estrategias y, como consecuencia, empiezan a integrar tanto el lenguaje como las ideas utilizadas. La evaluación entre compañeros y la autoevaluación proveen un marco para el diálogo y el aprendizaje, y con ello se fomenta la meta-cognición, es decir, pensar y hablar sobre cómo y qué aprenden los alumnos.

Implicarse en la autoevaluación y la evaluación entre compañeros permite a los alumnos y alumnas ser estudiantes autosuficientes; pueden guiar su propio aprendizaje porque son conscientes de las metas que pretenden alcanzar y qué deben hacer para conseguirlo. A través de su propia evaluación y la que hacen entre compañeros los alumnos se implican en el análisis y la crítica constructiva de su propio trabajo, lo cual incrementa su progresión y el nivel de los resultados. Los estudiantes adquieren la capacidad de centrar su aprendizaje en áreas en las que se sienten menos seguros. Pueden señalar las partes o conceptos del tema que representan mayor dificultad y concentrar sus esfuerzos donde más lo necesiten. La evaluación entre compañeros y la autoevaluación también permite a los profesores conocer con mayor rapidez y precisión las dificultades de sus alumnos y obtener un discernimiento más profundo de su progreso. De esta manera, los profesores pueden decidir con mayor certeza cómo emplear su tiempo, quién puede avanzar y quién requiere una atención especial.

Todos los alumnos pueden implicarse en la autoevaluación y evaluación entre compañeros. Incluso en las escuelas para alumnado con dificultades especiales existen estudiantes que reflexionan sobre el trabajo de sus compañeros y les proporcionan retroalimentación, con lo cual aprenden de forma considerable sobre su propio trabajo. Los que estudian matemáticas de alto nivel valoran la colaboración en lo que a veces parece una empresa solitaria. Tienen más motivación para aprender y saben que pueden superar los problemas con otros compañeros. La evaluación entre ellos puede ser una herramienta útil para ayudar a los alumnos a empezar a

usar frases y formas de expresión específicas, ya que es necesario para retroalimentar a otros.

Los alumnos quizá necesiten aprender tácticas para apreciar su progreso, ya que muchos subestiman su propio trabajo. La evaluación entre compañeros les ayudará a desarrollar una visión más acertada de sus habilidades. Casi siempre, la mayoría de los alumnos son honestos en la revisión de su propio trabajo. Sin embargo, a veces les cuesta admitir que no copian y dicen que entienden cuando no es así. La evaluación entre compañeros y la autoevaluación constituyen tácticas cruciales para ayudarles a superar estos obstáculos. Los alumnos necesitan tener la seguridad de que están aprendiendo y que cuando el trabajo parece difícil es cuando más aprenden.

Con frecuencia los alumnos son más honestos y competitivos entre ellos que con o hacia el profesor. Sé de un alumno que ponía orden en sus tareas rápidamente cuando un compañero le señalaba que era ilegible. El cuaderno recién organizado reveló mucho más sobre su habilidad matemática, tanto al profesor como a él mismo. Los alumnos se retan mutuamente más de lo que un profesor se sentiría capaz. Cuando conocen sus posibilidades, son también conscientes de sus objetivos y de cómo alcanzarlos, y se vuelven muy exigentes entre ellos. Todo este proceso les permite ser más objetivos con sus tareas y tener una idea de la calidad del trabajo que son capaces de adquirir.

Dificultades en la aplicación de la autoevaluación y la evaluación entre compañeros

Los objetivos de aprendizaje y los criterios de éxito deben ser explícitos y claros. Los alumnos tienen que saber lo que se espera que aprendan y cuándo habrán completado su aprendizaje con éxito. Esto se aplica a todas las lecciones.

Los criterios de éxito les permiten controlar o autoevaluar su progreso durante una lección. Cuando se implican en un episodio de aprendizaje más amplio, los criterios de éxito se pueden denominar criterios de evaluación, posiblemente vinculados a los de exámenes externos. Los alumnos pueden haber recibido los criterios de evaluación o elaborarlos ellos mismos. De cualquier manera, es importante que entiendan del todo los criterios y lo que deben hacer para completarlos. Los alumnos pueden conocer los criterios, pero tal vez no tengan una visión clara del tipo de trabajo que se requiere para ello. En este sentido una tarea modelo puede ser de utilidad; en tal caso, los alumnos utilizan los criterios para revisar las tareas modelo antes de comenzar la suya. El uso de trabajos modelo y de los criterios para la autoevaluación y evaluación entre compañeros ayuda a superar las barreras de aprendizaje.

Los alumnos necesitan aprender las destrezas de cooperación para poder evaluar a sus compañeros. Los profesores no pueden dar por hecho que sabrán cómo evaluar el trabajo de otros; los alumnos necesitarán ayuda para saber lo que les puede ayudar y lo que no. Por ejemplo, los profesores pueden recomendar que se atengan a los criterios de éxito cuando revisen las tareas de sus compañeros, o identificar dos cosas que hayan hecho bien y sugerir ideas que mejoren su trabajo. Los alumnos harán comentarios apropiados si emplean los criterios de éxito como punto de partida. Buscar el equilibrio entre señalar dos cosas buenas y un tema para mejorar les ayuda a adquirir mayor seguridad. Es importante destacar lo que se ha hecho correctamente, ya que lo deberán repetir en trabajos posteriores. Es también importante que la retroalimentación identifique lo que se debe mejorar y cómo pueden avanzar en su aprendizaje. Una vez que los alumnos entienden el proceso de evaluación entre compañeros sabrán que les será provechoso tanto evaluar como ser evaluado, y emplearán las ideas para mejorar su aprendizaje.

Es necesario sacar tiempo para permitir que estos procesos se enseñen, se practiquen y se incluyan en la práctica normal de la clase. La evaluación entre compañeros y la autoevaluación lleva tiempo: tiempo para aprender cómo el profesor quiere organizar la revisión, tiempo para que los alumnos aprendan a evaluar y a dar retroalimentación, tiempo para reflexionar y actuar sobre los resultados, y descubrir lo que se ha aprendido. Al principio parecerá que ocupa mucho tiempo, pero será un tiempo bien empleado. El resultado será un estudiante que confía en sí mismo, cuenta con estrategias para ayudar a sus compañeros a entender los criterios de evaluación y es capaz de decidir cuál será el siguiente paso en el proceso del aprendizaje.

Formas prácticas de ejercer la autoevaluación y la evaluación entre compañeros

Pedir a los alumnos que evalúen su nivel de confianza respecto a su trabajo. Ésta es una manera rápida de pedirles que se autoevalúen, pero es importante ayudarles a aprender técnicas de autoevaluación y favorecer una actitud de apoyo en la clase. Existen dos modos básicos para solicitarles que evalúen su nivel de confianza respecto a su trabajo: “semáforos” y “pulgares arriba”. Cualquiera que sea el método empleado, el profesor pide una evaluación rápida para saber si los alumnos están seguros de entender el concepto que están aprendiendo (semáforo verde o pulgares arriba), aún se sienten un poco inseguros (semáforo ámbar o pulgares horizontales) o muy inseguros (semáforo rojo o pulgares abajo). Para que el profesor aproveche bien su tiempo, la valoración se puede hacer directamente después del debate preliminar para averiguar quién puede comenzar directamente o quién necesita más diálogo, o celebrar una reunión breve después de trabajar de forma individual. Una

vez que los alumnos se acostumbran a esta forma de actuar el profesor percibe de inmediato si se sienten inseguros o necesitan estudiar un concepto de forma distinta. Al parecer, los alumnos prefieren decir "estoy un poco flojo en esto" en lugar de "lo encuentro difícil". Los alumnos pueden evaluar su trabajo con ayuda de la técnica de los semáforos al final de la lección para que los profesores puedan planificar el siguiente tema de manera que ayude a quien lo necesite y avanzar en el aprendizaje de aquellos que se sientan seguros.

Establecer compañeros de respuesta. Una de las maneras más comunes en la que he visto usar la autovaloración, es con compañeros de respuesta o "colegas" de estudio. Se trata de un par de alumnos escogidos por el profesor o bien para trabajar juntos todo el tiempo o como compañeros de evaluación que revisan el trabajo mutuamente y se ofrecen formas de mejorar. A menudo la pareja establecida no son amigos. Son elegidos para calificar, hablar juntos para identificar lo que han hecho bien y lo que aún requiere mejorar. Es importante que exista un acuerdo claro y fijar una serie de principios que manifiesten cómo han de trabajar. Algunos profesores piden a los alumnos que se reúnan con su compañero para realizar tareas específicas de evaluación. Otros los utilizan de un modo menos formal; quizá digan a sus alumnos "si os atascáis id a tener una conversación con vuestro compañero de respuesta y tal vez esto os sirva de ayuda". Los compañeros de respuesta pueden iniciar este importante proceso al aprender a escuchar y así aprender uno del otro. En una clase que usa el lenguaje para aprender matemáticas la escucha es vital, y servirse de compañeros de respuesta hará que los alumnos tomen conciencia de su magnitud.

Usar tareas modelo. Existen dos formas básicas de usar modelos para ayudar a los alumnos a entender cómo deben evaluar tanto el trabajo de sus compañeros como su propio esfuerzo.

Una de las maneras es usar trabajos reales, por ejemplo, los de alumnos del curso anterior.

Detallo a continuación una lista de convenciones comunes.

- El trabajo debe ser anónimo. Los alumnos encuentran difícil juzgar el trabajo de un compañero y el anonimato elimina esta barrera.
- Los criterios de éxito/evaluación pueden provenir del profesor, de los alumnos o de una fuente externa, por ejemplo, una junta escolar. No siempre es necesario que el lenguaje sea fácil, ya que en parte el propósito del ejercicio es aprender el significado del lenguaje utilizado en los criterios de evaluación actuales.
- La finalidad es aprender el significado completo de los criterios de éxito/evaluación, es decir, llegar a entender la calidad del trabajo requerido para conseguir los criterios. Por tanto, los profesores a menudo piden a sus alumnos que evalúen tres trabajos diferentes que revelarán a los alumnos varios modos de gestionar los criterios de evaluación.
- Los alumnos trabajan en grupos reducidos de tres o cuatro personas. Los grupos se motivan unos a otros para expresar y consolidar su comprensión de lo que significa cumplir cada uno de los criterios.
- Es muy importante que los alumnos vean un trabajo bien hecho, por ejemplo, un examen de curso con una nota elevada o un cartel bien confeccionado que muestre las transformaciones de los gráficos. Esto les permitirá tener una idea de cómo ellos mismos pueden lograr el mismo nivel. Puede merecer la pena explorar también los de nota baja; expresar por qué un trabajo está por debajo del nivel normal les recordará que no deben presentar algo parecido.
- Los alumnos deliberan juntos sobre qué tarea ha cumplido los criterios y después deciden sobre las reco-

> mendaciones que seguirán para mejorar. Ambas fases son importantes. Su atención debe estar enfocada en la parte positiva que servirá de ejemplo para reproducir buenos trabajos y, al ofrecer consejos para mejorar, ellos mismos expondrán la forma de producir un trabajo de elevada calidad.

Los profesores también pueden invitar a los alumnos a revisar trabajos ejemplares que contengan dudas y errores comunes. Esto les ayudará a aprender las destrezas de evaluación entre compañeros mientras hablan acerca de su aprendizaje matemático. A menudo los propios profesores producen este tipo de trabajo. Por ejemplo, dibujan un gráfico con una escala inconsistente sobre el eje "y" de ordenadas y marcan mal los puntos, o cometen un "error" al trabajar con ángulos de un triángulo, y concluyen con un ángulo obtuso cuando la respuesta debería ser un ángulo agudo. Se pide a los alumnos que consideren las respuestas y manifiesten lo que se ha hecho correctamente, para después elaborar una explicación de cómo se puede mejorar el trabajo. Ésta es una forma rápida de usar la evaluación entre compañeros y se puede hacer con toda la clase. Refuerza el desarrollo de las destrezas de evaluación entre compañeros y ayuda a los alumnos a aprender a articular sus conocimientos. Sin embargo, aquí el objetivo es el trabajo que no se ha hecho correctamente y el ejercicio no debería llevar mucho tiempo para que los alumnos puedan volver a pensar enseguida en la elaboración de un trabajo de calidad.

Corregir las tareas de casa con criterios claros. La evaluación entre compañeros puede ser una herramienta eficaz para garantizar que se terminen las tareas de casa. Los deberes de casa, en el mejor de los casos, deberían ser una preparación para la siguiente lección y no una tarea impuesta de forma independiente del resto del trabajo. Si la misión de las tareas de casa es comprobar la comprensión de los

alumnos de un concepto, el profesor querrá saber al comienzo de la siguiente lección cómo han prosperado. Para lograr resultados eficaces en todas las tareas, los criterios deberán estar claros, ya que después se podrán utilizar para la evaluación entre compañeros. Los profesores deberán cerciorarse de que las tareas sean intercambiadas entre los alumnos que normalmente no trabajan juntos. Habrá menos implicación emocional, por consiguiente les será más fácil ser honestos y francos. El compañero evalúa el trabajo de acuerdo con los criterios, e identifica lo que se ha hecho bien y lo que requiere ser mejorado. Si la tarea de casa no se ha completado, el compañero se quejará amargamente, lo cual normalmente bastará para que lo traiga terminado la próxima vez. Mientras se hace la evaulación el profesor observará de cerca y a continuación preguntará a la clase sobre lo que han descubierto. Tras unos diez minutos, tanto el profesor como la clase sabrán lo que necesitan aprender y por qué se ha tomado tal decisión; estarán preparados para continuar con el aprendizaje.

Pedir a los alumnos que revisen las tareas entre ellos sin que sepan las respuestas. Aunque al principio les parecerá difícil, es muy útil que les pidamos que trabajen juntos sirviéndose de los libros de texto, las notas y las respuestas de cada uno para que decidan sobre lo bien que un compañero ha contestado un problema. Les enseña que disponen de recursos y les revela qué utilidad tienen estos recursos. Al trabajar juntos, los grupos normalmente son capaces de dar con las soluciones correctas y explicar en qué áreas necesitan mejorar sus respuestas.

Introducir el método de los "cuatro cuadrantes" en la autoevaluación y la evaluación entre compañeros. Este método normalmente es útil cuando los alumnos se encuentran comprometidos con una tarea larga de varias lecciones. Al principio de la tarea deberán tomar una hoja de DINA4 y doblarla en cuatro cuartos. En el cuadrante superior izquierdo tienen que apuntar los criterios de evaluación;

los otros tres cuadrantes se utilizarán más tarde para la evaluación entre compañeros. Tras aproximadamente dos tercios del tiempo asignado para este trabajo, los alumnos intercambiarán las tareas con su compañero de respuesta o con un evaluador elegido por el profesor. El compañero evaluador aplicará los criterios de evaluación para rellenar el cuadrante superior derecho con "lo que se ha hecho bien". El mismo compañero también rellenará el cuadrante inferior izquierdo con "lo que necesita mejorar" basándose en los criterios para decidir qué escribir. A continuación, el trabajo se devuelve y tras leer las recomendaciones de sus compañeros, los alumnos reflexionarán sobre lo que han descubierto al calificar el trabajo de otro. El último cuadrante se denomina "mi cuadrante"; en él deberán registrar lo que han aprendido sobre cómo continuar mejorando su trabajo y utilizarán esas anotaciones para aplicar las mejoras necesarias.

Los cuatro cuadrantes

Criterios de evaluación	¿Qué se ha hecho bien?
¿Qué se necesita mejorar?	Mi cuadrante

La matriz de progreso. Se trata de un método que sirve para que los alumnos piensen en su trabajo y establezcan criterios que les puedan ayudar a lograr los mejores resultados posibles.

La matriz de progreso

	Comunicación	Trabajo sistemático	Uso de álgebra	Uso de gráficos y diagramas
Nivel muy elevado				
Nivel elevado				
Nivel aceptable				
Nivel inferior				

Al comienzo del tiempo asignado para el trabajo, la clase decide cómo definir una tarea en la que la comunicación ha sido aceptable, por debajo del nivel estándar, por encima del nivel estándar, o muy por encima del nivel estándar. Se pueden usar trabajos modelos para ayudar a los alumnos a concebir las descripciones. Las denominaciones de la matriz fueron concebidas para un trabajo de curso con objeto de lograr que los alumnos trabajaran de forma sistemática, aplicando el álgebra de manera apropiada y empleando diagramas con eficacia. Los alumnos necesitan tener una idea de cómo van a investigar un problema antes de concluir la matriz, de modo que en lugar de completarla de una vez se les pedirá que completen una sección cada cuatro lecciones. Tras dos tercios del tiempo empleado podrán usar su matriz de progreso para evaluar el trabajo de su compañero. La matriz también se podrá utilizar en el proceso de revisión de la última evaluación.

Conclusión

El desarrollo de la Evaluación para el Aprendizaje y la habilidad de los alumnos en el uso del lenguaje para expresar sus ideas matemáticas deben ir de la mano. Es importante que alumnos y alumnas expresen lo que realmente saben, comprenden y pueden hacer si se ha de usar eficazmente la Evaluación para el Aprendizaje. Sin embargo, en matemáticas, articular ideas puede ser muy difícil y el aprendizaje podría estar enmascarado por una incapacidad para expresarse. Cuando los profesores ayudan a sus alumnos a ser más competentes a la hora de expresar sus conceptos matemáticos también les ayudan a consolidarlos. Cuando los estudiantes pueden expresar con confianza un pensamiento matemático saben que lo pueden usar y dominar y su profesor también tiene claro qué dirección tomar para continuar mejorando dicho aprendizaje.

La Evaluación para el Aprendizaje está completamente integrada en una clase que habla sobre lo que aprenden en ese momento y cómo lo aprenden, y usan el discurso para crear y compartir los conocimientos. En tales clases las preguntas se utilizan para explorar el entendimiento, se da tiempo para pensar y tanto el profesor como los alumnos escuchan activamente las respuestas. Los alumnos reciben retroalimentación que les ayuda a discernir dónde han tenido éxito en su aprendizaje y cuáles son los siguientes pasos para continuar avanzando. Los alumnos también se implican en la autoevaluación y la evaluación entre compañeros, y esto les permite tener un enfoque meta-cognitivo, así como responsabilizarse de su aprendizaje.

Cuando se integra la Evaluación para el Aprendizaje como parte de la práctica de la clase, los alumnos adquieren facultades para ser autoeficaces, saben aprender y regularse solos, pueden guiar su propio aprendizaje y su autoestima y, por tanto, su motivación se incrementa. Saben que son capaces de aprender eficazmente.

CAPÍTULO V

Avanzar en la comunicación matemática con una finalidad

En este capítulo profundizaré en la implicación de los alumnos en el proceso de aprendizaje. Para que mejore su nivel de aprendizaje es preciso que hablen más de matemáticas. Comunicar sus ideas mientras aprenden les permite usar y dominar los conceptos matemáticos con mayor seguridad de lo normal. Sin embargo, para ello deben adoptar un papel diferente en la clase, al igual que el profesor. Deben estar involucrados y responsabilizarse de su propio aprendizaje con el apoyo de sus profesores. Hay muchas de maneras de conseguir esto: al cambiar la forma en que los alumnos interactúan respecto a las tareas y entre ellos; al plantearles problemas para resolver más complejos; y al pedirles que expresen sus ideas matemáticas por escrito. En este capítulo expongo todas estas cuestiones.

Involucrar a los alumnos en el proceso de aprendizaje

Estar involucrados en el proceso de aprendizaje significa que los alumnos sienten que dirigen su propio proceso y tienen cierto control sobre la forma de proceder en su aprendi-

zaje. Es decir, pueden dominar el concepto que desean investigar, y saber cómo completar una tarea o incluso la pauta que han de seguir en cada lección. Los alumnos se implican cuando participan plenamente en el discurso de clase. Cuanto más implicados estén en el proceso de aprendizaje, más probabilidades de éxito tendrán porque:

- serán capaces de hablar sobre las matemáticas que aprenden, por tanto, sabrán qué conceptos entienden y aplican mejor, y cuáles tienen que trabajar aún, y cómo proceder para progresar,
- serán capaces de responsabilizarse de su propio aprendizaje al saber que tienen lagunas y cómo proceder para vencerlas,
- tendrán una visión de hacia dónde se dirige su objetivo y cómo llegar hasta él,
- sentirán que dirigen el proceso, y por tanto estarán más interesados y motivados,
- desarrollarán un conocimiento intuitivo de los criterios de éxito en su trabajo, lo que redundará en una mayor perseverancia en la tarea incluso cuando les resulte difícil.

El objetivo de centrarse en el lenguaje es permitir a los alumnos tomar el control sobre sus propios pensamientos e ideas matemáticas. Facilitar la habilidad de los alumnos para expresar sus ideas matemáticas es un gran paso hacia su implicación en el proceso de aprendizaje.

Alumnos y alumnas aprenden con mayor eficacia cuando asumen su responsabilidad desde el comienzo del proceso de aprendizaje. Cuando asumen la responsabilidad de su aprendizaje ven al profesor como un recurso para acompañarles en este proceso. El papel del profesor se convierte en el de facilitador o capacitador, no el que impone y se entromete, sino el que les apoya y les aporta. Los alumnos se implican de este modo cuando el profesor acuerda con ellos

la forma en que debe desarrrollarse la lección, y cuando el discurso trata del contenido que los alumnos deben aprender y sobre la forma de llevar a cabo este aprendizaje. Cuando los alumnos participan plenamente en un diálogo e influyen en el curso que toma y les afecta, ven más allá del diálogo y son capaces de usar las ideas que han sido argumentadas. Cuando se implican en el proceso de aprendizaje, se convierten en una parte integral del discurso que desarrolla el conocimiento; se convierten en parte de una comunidad que concibe definiciones. La implicación de los alumnos en esta labor significa que están motivados para adoptar una postura meta-cognitiva, toman conciencia de su propio aprendizaje y son capaces de asumir la responsabilidad que conlleva.

Todas las ideas de los dos capítulos anteriores se enfocan en la implicación de los alumnos en el proceso de aprendizaje, sin embargo, en este capítulo, en primer lugar me gustaría tratar tres temas que aún no he desarrollado:

1. el trabajo en grupos reducidos, que puede ser complejo en matemáticas, pero que es vital para que los alumnos se sientan implicados,
2. dejar a los alumnos que tomen decisiones sobre su trabajo es un factor importante que les permite asumir la responsabilidad de su propio aprendizaje,
3. motivar a los alumnos para que ejerzan como profesores, un planteamiento que les permite tomar conciencia de lo que saben, de lo que pueden usar, y de que pueden explicar sus ideas matemáticas.

Trabajar en grupos reducidos

El trabajo en grupos reducidos es muy importante en una clase de matemáticas en la que se habla y se aprende. Si toda la clase habla, cada uno de los alumnos recibe una gran

variedad de información de los demás compañeros, pero sigue habiendo poco tiempo para su propia aportación. Por tanto, el trabajo organizado en grupos reducidos es un factor importante en una clase en la que todos los alumnos aprenden a hablar de sus conceptos matemáticos. Tienen que "pensar en alto" cuando trabajan juntos en grupos, e intentar aplicar las ideas y recibir retroalimentación entre ellos. El hecho de verbalizar una idea permite que la persona que lo hace comprenda su importancia o, por el contrario, advierta que no tiene mucho sentido. El trabajo en grupos reducidos permite que un mayor número de alumnos tenga acceso a las ventajas de pensar en alto y escuchar cómo lo hacen los demás.

La primera y más importante consideración es que la interacción efectiva en grupos reducidos no ocurre de forma repentina; como con todo lo demás que ocurre en la escuela, los alumnos tienen que interactuar y aprender juntos. Si el trabajo en grupos reducidos se establece con destreza los alumnos aprenden de manera considerable al formar parte del proceso.

Es importante tener en cuenta los siguientes principios al hacer uso del trabajo en grupos reducidos.

El trabajo en grupos reducidos no sólo trata de tres o cuatro alumnos sentados alrededor de una mesa haciendo el mismo trabajo; cuando los alumnos toman parte en un trabajo de grupo, cada uno tiene un papel específico en el mismo, así como la responsabilidad de cumplir su propia tarea. El propósito de trabajar y hablar juntos mientras cada uno aporta su propia experiencia y visión, es crear algo superior a lo que hubiera concebido cada uno de forma individual.

La labor del trabajo colectivo se inicia al explicar a los alumnos por qué trabajan en grupos reducidos. La asamblea sirve para reflexionar sobre lo que se ha aprendido en matemáticas y sobre la experiencia de su grupo de trabajo, y de este modo considerar cómo su conducta en un contexto de grupo ha contribuido al éxito del mismo, o de la tarea.

Deben ser grupos "con cometido", es decir, elegidos con una finalidad en concreto. Por ejemplo, los profesores deciden poner juntos a los alumnos que muestran un buen entendimiento de la tarea con aquellos que tienen dificultad en arrancar, de modo que todos sin excepción tengan la oportunidad de enseñar y aprender de sus compañeros. Se puede optar por agrupar a los alumnos por niveles similares de comprensión, de modo que todos puedan afrontar un reto específico. Otra posibilidad es reunir grupos de amigos al asumir que los alumnos necesitarán apoyarse mutuamente dada la naturaleza de la tarea. Sea cual sea la forma de agrupar a los alumnos, debe ser planificado junto con la actividad, y la decisión debe ser tomada con un propósito en mente.

Llewellyn

Llewellyn fue incluido en los informes como "uno de los colegas, Troy". Era sociable y parlanchín, pero no estaba preparado para hablar de pensamientos matemáticos, probablemente porque le preocupaba parecer estúpido frente a sus amigos.

Comenzó a usar el lenguaje matemático en los debates con toda la clase, al principio con timidez. Escuchaba a sus compañeros y, durante una clase en la que pedí a los alumnos que pensaran en cualquier palabra que estuviera asociada con porcentajes, Llewellyn empezó a mostrar que estaba preparado para intentar usar este lenguaje.

Tras sugerir todas las palabras normales, Colette sugirió "ratio" e inmediatamente Llewellyn sugirió "fracción".

Llewellyn escuchó a los demás y utilizó los pensamientos de sus colegas para ampliar los suyos. Poco tiempo después empezó a ayudar a otros compañeros que se sentían más inseguros.

(Continúa)

Al principio, Shaun dijo que lo había entendido mal porque le salían resultados como 0,6857892. Pero Llewellyn dijo: "pero, eso es 0,7, ¿no es así, señorita?"

Los alumnos trabajaban en grupos reducidos cuando investigaban problemas matemáticos. A veces podían intervenir en sus conversaciones y animarles a usar sus expresiones matemáticas. Mientras Llewellyn completaba su Proyecto de Pelota de Golf observé que empleaba el lenguaje matemático para "pensar en alto":

"Esta es una caja grande en la que caben 12", dijo Llewellyn al señalar una red que había dibujado para un cubo de 10 × 3 × 3. "De modo que, ¿cuántos cabrán aquí?" Pregunté. "Tres en diez centímetros". "¿Y aquí?" "Uno, oh, ya veo, no es suficiente... ¡ya veo lo que he hecho mal!"

Más tarde Llewellyn habló serenamente sobre la sensación de seguridad que había adquirido. Sentía que había trabajado duro.

Llewellyn llegó a considerarse un estudiante competente en matemáticas. Al final del año quedaba claro que se veía capaz de usar y dominar las ideas matemáticas, y estaba dispuesto a implicarse más en su trabajo y completarlo con eficacia. Sabía usar el lenguaje matemático, "pensar en alto", y esto le permitía organizar sus pensamientos y resolver problemas matemáticos. También se consideró capaz de guiar a otras personas en su esfuerzo por comprender.

La actividad debe garantizar el trabajo en grupos; debe haber una razón para hablar sobre el trabajo y contribuir a la evolución de los conocimientos del grupo. He aquí algunos ejemplos de tareas adecuadas:

- aunar las investigaciones individuales sobre patrones en la representación gráfica de ecuaciones, o sobre las

propiedades de ciertas formas geométricas, ya que cada estudiante tendrá unas nociones específicas que aportar, así como conocimientos que aprender de los demás compañeros del grupo,

- trabajar juntos como grupo para determinar la solución correcta a una pregunta de la tarea de casa cuando no se proporcionen las respuestas,
- comparar sus soluciones de un problema largo con uno que entregue el profesor; el grupo tendrá que decidir si sus propias soluciones son correctas e iguales, correctas pero diferentes, o incorrectas, y aclarar qué errores han cometido,
- razonar una serie de problemas plasmados sobre tarjetas y decidir si las respuestas se pueden encontrar usando el seno, el coseno, o la tangente; la tarea no consiste en responder a las preguntas, sino hablar sobre cómo se pueden contestar.

En cada una de las tareas anteriormente mencionadas el grupo necesita compartir su conocimiento y experiencia para completarla; deben trabajar juntos, hablar y compartir sus ideas ya que la tarea sería excesivamente difícil para una sola persona.

El profesor debe dejar claro a los alumnos que espera que trabajen juntos y cómo deben hacerlo. En muchas ocasiones los profesores asumen que los alumnos saben hablar y trabajar juntos, pero éstos a menudo piensan que usar las ideas de otros es “hacer trampa” o que “no está permitido” hablar y compartir ideas en clase. Tales percepciones deberían tender a ser menos frecuentes, sobre todo en el Reino Unido donde aún escucho estos comentarios de los alumnos y profesores, pese a que la Estrategia Nacional fomenta el trabajo y el pensamiento en grupo. Los alumnos obtienen más ventajas al trabajar juntos como grupo cuando lo encaran como un reto. Si los miembros del grupo trabajan juntos y comparten sus ideas, tienen más capacidad para apoyarse

y dominar tareas complejas. Sin embargo, puede ser difícil que los alumnos recuerden trabajar juntos si la tarea les ha desestabilizado. Por lo tanto, es vital que sea el profesor quien establezca cómo deben trabajar hasta estar absolutamente seguro de que en la clase se apoyan unos a otros como algo natural.

Si se establece un grupo reducido de acuerdo con los principios antes descritos, los alumnos se beneficiarán enormemente del trabajo en grupo al compartir conocimientos y ser capaces de proporcionar y recibir retroalimentación de sus propias ideas matemáticas. Los alumnos que exploran así las ideas matemáticas con regularidad, hablan y aprenden juntos incluso cuando no se les ha indicado de forma explícita porque entienden lo práctico que es.

Departamento de Matemáticas de Woodside
Normas para hablar en grupo

- Todo el mundo debe contribuir, no dejes que esta labor recaiga en una sola persona.
- Expresa tus ideas con claridad.
- Respeta la contribución de todos.
- Escucha con atención a cada uno.
- Proporciona retroalimentación:
  diles si piensas que su idea es buena,
  diles si ves una manera de mejorar su idea,
  diles si piensas que han cometido una equivocación, pero prepárate para justificarlo y escucharles.

La elección es importante

Los alumnos deben ser capaces de tomar decisiones si han de asumir la responsabilidad de su propio aprendizaje y saben que están implicados en el proceso de aprendizaje. Se

involucran en el proceso de aprendizaje cuando se les ofrece la oportunidad de escoger y se les motiva a tomar decisiones sobre su aprendizaje. Aceptan tomar decisiones de buen grado, pero no siempre les es fácil llevarlo a la práctica. Por lo tanto, los profesores deben ayudar a sus alumnos a comprender que hay que tomar decisiones y que son capaces de hacerlo. He aquí algunos ejemplos.

Qué tarea hay que hacer. Por ejemplo, el profesor proveerá tres opciones diferentes para que los alumnos continúen mejorando su conocimiento sobre ecuaciones de segundo grado: aquellos que en principio se sientan cómodos con el trabajo y estén preparados para avanzar escogerán un camino; los que necesiten algo más de práctica, pero estén relativamente seguros escogerán otro camino; y los que aún se muestren inseguros escogerán el tercer camino. El profesor no toma la decisión, ni siquiera aconseja a los alumnos; la consecuencia para los que toman una decisión equivocada es que el trabajo que desempeñen no será el adecuado para ellos. Aprender es competencia del alumno, por tanto es su responsabilidad tomar la decisión correcta. Pueden cambiar de opinión y escoger algo diferente una vez que hayan examinado la tarea. La intención en esta lección es por un lado mejorar la habilidad del alumno para usar ecuaciones de segundo grado, y por otro, dar mayor importancia a su papel central en el proceso de aprendizaje.

Cómo hacer el trabajo de aprendizaje. Cuando los alumnos están implicados en la investigación de un problema matemático son capaces de escoger el modo de resolver un problema, incluso cuando aún no han investigado lo suficiente. Para los alumnos, tal riqueza de elección resulta difícil salvo que se hayan acostumbrado a decidir en otras lecciones. Por consiguiente, exigirles que tomen pequeñas decisiones sobre cómo llevar a cabo las tareas de aprendizaje les ayudará a tomar decisiones más importantes; por ejemplo, “¿Quieres usar los tableros para escribir eso o prefieres

hablar de ello directamente?", "¿Quieres intentar dibujar estos gráficos primero o prefieres responder directamente a la Gran Pregunta?"

Qué concepto matemático se debe usar. Los alumnos deberán ser capaces de decidir qué concepto matemático es apropiado para solucionar un problema. Ésta es una destreza importante a la hora de aprobar un examen, aunque también lo es como destreza en la vida. Cuando se les da la posibilidad de escoger, los alumnos comprueban que son capaces de tomar esas decisiones. En un debate en el que participa toda la clase se expone un problema y se invita a los alumnos a sugerir ideas para resolverlo. Este planteamiento se puede emplear con frecuencia, sobre todo si la pregunta se elige meticulosamente. A veces los alumnos tienen que escoger entre ideas que han trabajado recientemente, y otras veces se ven obligados a elegir conceptos que han estudiado hace mucho tiempo. El planteamiento siempre exige a los alumnos que describan el proceso que siguen para obtener la respuesta y por qué escogen un procedimiento en lugar de otro. En el trabajo con grupos reducidos se entrega a los alumnos pequeñas tarjetas que contienen diferentes problemas. Dependiendo de la fase de aprendizaje de los alumnos, podría tratarse de cualquier cosa, desde problemas de aritmética que requieran que escojan entre suma, resta, multiplicación o división, a problemas que involucren varias formas de integración. De nuevo, la cuestión es que los alumnos se centren en elegir el concepto matemático apropiado, busquen claves, y expresen y tomen decisiones bien fundadas en lugar de limitarse únicamente a resolver el problema.

Con qué rapidez se debe avanzar a una tarea nueva. Es importante que después de aprender un concepto los alumnos participen en las decisiones sobre cuándo están preparados para asumir más trabajo o una tarea diferente. Son ellos quienes hacen el aprendizaje y por tanto deberían poder expresar su opinión sobre la etapa de su formación.

Los objetivos de aprendizaje y los criterios de éxito ayudarán a los alumnos a tomar estas decisiones pero, salvo que se impliquen en los debates sobre el ritmo del aprendizaje, el profesor siempre actuará según la experiencia anterior. Con ayuda, los alumnos serán capaces de expresar cómo viven el ritmo de su aprendizaje, por lo que después el profesor podrá deducir: "Ya no tengo que adivinarlo, ellos me dicen lo que necesitan aprender".

Implicar a los alumnos en el proceso de enseñanza

Los alumnos se implican en el proceso de aprendizaje al formar parte del proceso de enseñanza. Cuando se ayudan unos a otros a aprender conceptos matemáticos, de forma natural adoptan la identidad de un matemático, es decir, alguien que puede hablar sobre conceptos matemáticos y por tanto los conoce y sabe usarlos.

Los alumnos llegan a formar parte del proceso de enseñanza de varias maneras, incluso cuando se corrigen unos a otros en un debate toman parte en el proceso. En el siguiente intercambio de un debate que tuvo lugar al final de una lección, Llewellyn adoptó el papel de profesor. Sabía redondear decimales y conocía las tangentes que estudiaba la clase.

> Shaun dijo: "Me he equivocado: mis respuestas son como 0,6857892", a lo que respondió Llewellyn: "pero eso es 0,7, ¿no es así, señorita?"
>
> A continuación de este intercambio, Llewellyn se sentó junto a Shaun y comprobó que éste había comprendido. Cuando los alumnos participan plenamente en el discurso de la clase, adquieren la capacidad de expresar su comprensión de los conceptos matemáticos, y por tanto

pueden adoptar el papel del profesor. Cuando Llewellyn explicó a Shaun que había comprendido la idea y que podía usar tangentes para resolver problemas, Llewellyn tuvo que expresar sus ideas claramente, utilizando el registro matemático y profundizar en su conocimiento sobre tangentes. Shaun contaba con alguien que le hablaba a su nivel y que le podía proporcionar el tiempo que necesitaba para hacer preguntas. En esta situación tanto Shaun como Llewellyn fueron favorecidos.

En la medida en que los alumnos expresan sus ideas matemáticas con mayor fluidez, están más preparados —y por tanto es más probable— para actuar como profesor de un modo informal. Es posible establecer actividades más formales donde se requiera a los alumnos que ejerzan de profesores para sus compañeros. Esto tendrá los mismos beneficios que he descrito antes. Se exigirá al "alumno-profesor" que exprese de una manera clara y precisa lo que ha entendido, con lo que se vería obligado a examinar el concepto matemático en profundidad, a menudo para llegar a una comprensión más amplia y completa. El "aprendiz-alumno" tendría un "profesor" que le hablaría a su nivel, con cierta comprensión de los problemas por los que pasan y con quien sentiría que puede hacer preguntas que no podría hacer a su profesor. He aquí dos ideas para invitar a los alumnos a desempeñar el rol de profesores.

1. Pedir a los alumnos que se guíen ellos mismos con la técnica del semáforo sobre lo seguros que se sienten respecto a un concepto que están aprendiendo. Pedir a los "verdes" (los que se sienten seguros) que trabajen con los "ámbar" (los que se sienten algo inseguros) para contestar preguntas, de modo que todos acaben en "verde". El profesor trabajará con los alumnos "rojos" (los que se sienten muy inseguros) para ayudarles a resolver los problemas.

2. Tras corregir un trabajo, organizar a los alumnos por parejas según su competencia: los de alto nivel con los medianos y los medianos con los de nivel bajo. La responsabilidad del "profesor" es instruir al "aprendiz" a que tenga más éxito en las tareas como, por ejemplo, conseguir puntuaciones más altas en un simulacro de examen. Es importante inculcar a los alumnos que no se trata sólo de proporcionarle las respuestas correctas, sino que el "aprendiz" debe también entender cómo puede mejorar trabajando más.

El reto como un factor importante en el aprendizaje del alumno

El reto es un factor importante en una clase oral y práctica. Una tarea es un reto si exige una reflexión matemática más compleja de lo que se espera normalmente de los alumnos. Por consiguiente, una tarea puede resultar difícil para un alumno y para otro no. Una tarea que supone un reto es difícil de completar y obliga al alumno a pensar en un concepto durante mucho tiempo. El profesor necesita conocer a sus estudiantes para poder establecer el nivel del reto de matemáticas lo más elevado posible (JAWORSKI, 1994, pág. 96). He descubierto que cuando el reto es elevado y los alumnos comentan, trabajan y se apoyan, están preparados para afrontarlo y experimentan una gran satisfacción por haber dominado un problema complejo.

Una vez que se acostumbran a la idea, los alumnos disfrutan trabajando en uno o dos problemas difíciles de una lección en lugar de apresurarse a resolver los más fáciles. Cuando sondeé a los alumnos para averiguar su punto de vista sobre esto, la mayoría reconoció que trabajar duro para examinar un problema complejo era más beneficioso para su aprendizaje que trabajar en numerosos problemas cortos. Hubo una voz discrepante. Su razón para preferir numerosos

problemas sencillos era que de este modo era más fácil para él y no tenía que pensar. Los alumnos tienen que acostumbrarse a una nueva forma de pensar. Están habituados a creer que tener éxito en las matemáticas es tener una gran cantidad de problemas resueltos en sus cuadernos. Cuando trabajan juntos para estudiar la lección y resolver una "pregunta importante" tal vez ni siquiera anotan nada en sus cuadernos. Los criterios de evaluación mostrarán qué alumnos aprenden con éxito y hasta dónde han llegado en el aprendizaje. A continuación detallo un par de sugerencias que se pueden intentar.

Poner tres "sumas difíciles". Pide a los alumnos que trabajen en grupos reducidos para ver hasta dónde pueden llegar con cada una, y que anoten sus ideas en una hoja. Pide a los grupos que escriban sus comprobaciones en la pizarra o los cuelguen donde todo el mundo pueda verlo. Discute la solución a cada problema tras observar cómo ha comenzado cada grupo, cómo ha continuado y cómo se podría haber resuelto el problema. Recopila todas las ideas generadas por los debates del grupo, y que los alumnos consideren en nombre de toda la clase qué ideas podrían ser útiles. Usar el término "sumas difíciles" ayuda a los alumnos a saber que no se espera de ellos que completen todos los problemas solos, y contribuye a su sensación de éxito cuando llegan a entender cómo resolverlos.

Intentar pasar todo el tiempo de clase con un solo "problema importante". Empezar por examinar el problema y decidir qué conocimientos matemáticos se necesitarán para resolverlo. Comprueba que la clase puede usar todos estos conceptos. Pide a los alumnos que empiecen por resolver el problema solicitando a todos que aporten ideas, comuniquen cualquier progreso realizado, o proporcionen cualquier explicación necesaria. Hacia el final de la clase invita a uno de los grupos a que informe sobre cómo han resuelto la "Gran Pregunta" y pide al resto de la clase que haga preguntas sobre las informaciones que aporta el grupo acerca del proceso

que han realizado o sobre cualquier otra cosa que no les haya quedado clara. Discutir las diferencia del modo en que otros grupos han afrontado o solventado el problema.

Incluso el profesor más concienzudo de vez en cuando establecerá el nivel de exigencia demasiado alto. Esto no tiene por qué ser un desastre. Si se ha desarrollado una relación de confianza entre el profesor y la clase, entonces no le costará admitir que ha calculado mal y hablará de lo que la clase necesita aprender antes de que afronten otro reto. Una vez que se han aprendido los conceptos que faltaban, la clase puede volver a la pregunta difícil. Es importante establecer "armonía" (POTARI y JAWORSKI, 2002, pág. 374), es decir, un equilibrio entre la sensibilidad hacia las necesidades de aprendizaje de los alumnos y el reto matemático provisto para apoyar su desarrollo cognitivo.

Alfabetización y matemáticas

Muchas personas piensan que es difícil vincular la alfabetización con las matemáticas, pero este libro trata de ello en su totalidad. Alfabetizarse es ser capaz de comunicar tus ideas con claridad a otras personas y entender lo que éstas intentan comunicarte. Por tanto, aprender a expresar tus ideas matemáticas, ya sean orales o escritas, es mejorar tu nivel de alfabetización en matemáticas.

Hasta el momento, no he considerado la escritura de forma específica, ya que prefiero el término más ambiguo "expresar o comunicar ideas matemáticas" que, por supuesto, puede referirse a escribir o hablar. En parte, esto se debe a que en una clase atareada es inevitable usar la escritura para asegurar que las expresiones de todos los alumnos puedan ser revisadas por cualquier otro miembro de la comunidad. Sin embargo, muchas de las ideas que he defendido en relación a la escritura sugieren que se hagan borradores o se utilice la pizarra para que las expresiones tengan un

carácter temporal. Para los alumnos es difícil usar el lenguaje matemático, encontrar las palabras adecuadas y crear la definición que necesitan. Escribir en sí ya es una barrera para muchos alumnos, para quienes hacerlo supone un esfuerzo y les preocupa la permanencia de la palabra escrita. Por tanto, muchos alumnos consideran difícil poner por escrito sus ideas matemáticas.

No sugiero que no se pida a los alumnos que escriban en matemáticas; de hecho, yo defiendo que escriban bastante para explicar y justificar cómo hacer uso de sus ideas matemáticas. Sin embargo, los profesores no deben olvidar que solicitar esto es algo difícil para la mayoría de los alumnos. También es importante que ellos piensen y hablen, y la escritura no debería ser un obstáculo para estas actividades elementales. Los alumnos necesitarán un gran apoyo para elaborar cualquier tipo de comunicación matemática por escrito. Es crucial en ese apoyo ser capaz de hablar con confianza sobre las ideas que posteriormente se verán obligados a escribir.

Escribir y tomar apuntes con un propósito

Escribir y tomar apuntes en matemáticas deberá tener un propósito. A menudo la escritura en matemáticas se da por hecho, cuando en realidad los alumnos aprenderían más al pensar y hablar juntos, y al tomar notas de sus conversaciones. Si no hay necesidad de escribir entonces yo exhortaría a los profesores de matemáticas a no ceder a la presión que pudieran ejercer los alumnos para completar cuadernos de ejercicios repletos de sumas correctas y ordenadas. Si el profesor está influenciado por una presión manifiesta para hacer escribir a los alumnos aun cuando sienta que sería mejor que pensaran y argumentaran, yo le recomendaría “dejar que los resultados hablen por sí solos”. Busca permiso para experimentar así con el trabajo en un grupo y deja que los resultados después de, digamos, un año (los resultados

no llegan enseguida cuando se hacen cambios importantes en la manera de trabajar) revelen si los alumnos necesitan escribir todo o no.

Hay ocasiones en los que la escritura es importante. La escritura implica producir un registro permanente de pensamientos e ideas; por tanto, cualquier registro debería pensarse detenidamente y probablemente redactarlo por segunda vez. Hay un profesor que recomienda a sus alumnos que denominen sus cuadernos de apuntes Guías de Revisión Personal. Esto recalca el hecho de que al escribir crean un registro permanente de ideas y conceptos que les ayudará a recordarlas en el futuro. No son "ejercicios", de modo que no los llaman "cuadernos de ejercicios".

Pensar, hablar, escribir, leer y volver a redactar

En esta sección cuando utilizo la palabra "escribir" me refiero a un registro permanente de pensamientos matemáticos, ideas y conceptos, en oposición a tomar notas o hacer un registro temporal para apoyar el pensamiento. Escribir es más recomendable en las clases de matemáticas de lo que generalmente se piensa. Pedir a los alumnos que creen un registro permanente de las ideas que han aprendido aporta los mismos beneficios que expresarlos. Las ideas se organizan, se revelan y se ponen también en orden las confusiones. Asimismo, se afrontan las dudas, y en conjunto todo se recuerda con mayor naturalidad y se puede usar en otros momentos para resolver otros problemas. La escritura crea un registro permanente que se puede revisar más tarde y las ideas sobre las que se ha escrito se pueden evocar con facilidad.

Si la escritura cuenta con los mismos o más beneficios que la expresión oral, también contiene las mismas o mayores dificultades. No sólo se requiere a los alumnos que piensen y hablen usando un lenguaje que no sienten como suyo,

sino que además se les pide que anoten pensamientos que otros puedan examinar y por tanto evaluar. No es de extrañar que la solicitud de escribir sobre sus ideas matemáticas les parezca desalentadora y difícil. Muchos profesores consideran este aspecto tan difícil que sienten que los beneficios no merecen la pena. Sin embargo, incluso en el caso de que los alumnos nunca construyan una sola frase de matemáticas, o aunque nunca se les pidiera que expliquen, describan o justifiquen sus ideas, sí se les exigiría formular frases matemáticas. Es posible considerar las soluciones a los problemas matemáticos como párrafos con frases escritas en un orden correcto para que tengan sentido y como consecuencia sean una respuesta. Explicar, describir y justificar es una parte importante de las matemáticas; el sistema de pensamiento matemático requiere la comunicación de ideas. Cuando se pide a los alumnos que escriban como tarea, se involucran en áreas importantes del pensamiento matemático.

Escribir es importante, pero en matemáticas es difícil y exige mucho. Por lo tanto, si escribir ha de ser el resultado final de una experiencia de aprendizaje, los alumnos deben recibir ayuda mientras deciden lo que van a escribir. El apoyo podría ser hablar de lo que tienen que escribir y decidir entre toda la clase qué ideas y palabras se deberán incluir en la tarea (de hecho, esto es establecer criterios de éxito). Los alumnos trabajarán entonces de forma individual para elaborar un borrador de lo que quieren decir; se lo leerán a un compañero, quien hará sugerencias sobre cualquier cosa que pueda faltar o no esté del todo clara. El profesor reunirá a la clase y preguntará sobre algo que haya surgido en los diálogos o cualquier tema que el grupo no pueda resolver sin ayuda. Sólo entonces los alumnos concluirán su trabajo.

Una actividad escrita también podría consistir en hacer grupos de dos alumnos para idear un diagrama de flujo que detalle la secuencia de eventos que deben ocurrir, las condi-

ciones que deben darse y las decisiones a tomar cuando se usa un concepto matemático para resolver un problema. Los diagramas de flujo se expondrán y todos examinarán los ejercicios de varios compañeros. Utilizarán marcadores de color verde para destacar las ideas que consideren especialmente buenas y marcadores de color naranja para mostrar áreas que estimen que tienen que revisar. El profesor observará con atención el diagrama de flujo y averiguará si existen ideas o dudas que tengan que examinar todos o tan sólo unos pocos. Los alumnos recuperarán sus diagramas y corregirán lo que está marcado en color naranja, o según la retroalimentación del profesor, o porque han averiguado otro modo que consideran más comprensible que el que han utilizado antes. A continuación se podrá usar el organigrama para elaborar una explicación escrita con ejemplos de las ideas que han aprendido y aclarado, o los alumnos se limitarán a mejorar su diagrama de flujo y añadirle algunos ejemplos.

Si los estudiantes han de elaborar una información permanente de sus ideas matemáticas es importante que:

Piensen sobre lo que intentan comunicar y se les dé suficiente tiempo.

Hablen al menos con otra persona, pero preferiblemente con más de una cuando decidan cómo expresarán su comunicación.

Escriban sólo cuando hayan pensado y comentado sus ideas.

Lean para ellos mismos y para otras personas para ver y oír si se comunican bien.

Redacten de nuevo el borrador basado en la retroalimentación recibido en la fase de la lectura, con lo que aprenderán a mejorar su trabajo y asumirán que pueden desarrollar comunicaciones de calidad.

Cuándo escribir y cuándo no

En muchas lecciones de matemáticas los alumnos escriben demasiado y no piensan lo bastante; no piensan sobre las ideas que aplican, en qué circunstancias trabajarán y cuando no lo harán. Yo abogo por escribir menos y pensar más. Más reflexión implicará más conversación, ya que hablar es la forma en que las personas piensan juntas y ayuda más a los alumnos a entender el pleno significado del concepto bajo debate, y a utilizarlo y dominarlo por completo.

Sin embargo, hay momentos en que escribir o registrar ideas es importante:

- cuando los alumnos necesitan hacer un registro permanente de una idea que han llegado a dominar para poder consultarla en otro momento,
- cuando un tiempo de reflexión en silencio es apropiado para que los alumnos puedan anotar lo que han comprendido o aplicar un concepto,
- cuando plantean cuestiones sobre un concepto para que resuelva otra persona,
- cuando intentan resolver un problema complejo con muchos pasos y necesitan un registro de los caminos que han tomado,
- cuando se les pide que expliquen al profesor lo que saben, lo que han comprendido, y lo que son capaces de hacer para poder planificar adecuadamente las lecciones siguientes,
- cuando necesitan transformar las ideas que han sido desarrolladas con participación de toda la clase en recordatorios sobre cómo aplicar un concepto.

Ejemplos de momentos en que los alumnos no necesitan escribir:

- cuando deben pensar; escribir podría hacer que se desconecten mientras copian algo en sus cuadernos,
- cuando deben hablar y aclarar sus ideas en lugar de concentrarse en el acto de escribir,
- cuando resuelven sumas sencillas que resolverían mejor de forma mental o, como mucho, apuntando las respuestas sobre una pizarra o en papel de borrador si fuera necesario,
- cuando trabajan juntos como grupo para concebir una explicación importante; los alumnos necesitan hablar y llegar a un acuerdo sobre una explicación convincente; recordar demasiado pronto puede detener el esfuerzo por conseguir concisión y claridad, lo cual constituye una parte del pensamiento matemático.

Puede merecer la pena pensar en la escritura para “hacer más permanente la explicación oral”. Cuando los alumnos piensan, hablan y clarifican sus ideas, estarán más preparados para escribir y perfeccionar lo escrito mientras se esfuerzan por elaborar un registro claro, conciso y exacto de un concepto matemático. Su escritura entonces se convierte en un registro útil de lo que necesitarán para aplicar los conceptos o ideas matemáticas. Los alumnos podrán volver a consultar lo que han escrito y esto les conducirá hacia lo que necesitan saber para solucionar un problema, usando por ejemplo, el teorema de Pitágoras, lo cual les aportará un enfoque que no obtendrán al contemplar un problema ya solucionado. De esta manera, su escritura cumple dos funciones: la de clarificar y organizar sus ideas, y la posibilidad de consultar y usar ese concepto más adelante.

Si los profesores ayudan a sus alumnos a aprender con mayor facilidad al enseñarles a hablar de sus ideas matemáticas, la escritura cobrará menos importancia en la clase. Los alumnos creerán que no han trabajado en matemáticas porque no han escrito nada en sus cuadernos de ejercicios, cuando de hecho habrán trabajado duro, al pensar, hablar,

reflexionar, clarificar, explicar y justificar sus pensamientos, y al aprender a usar y dominar los conceptos matemáticos. Trabajarán muy duro al aprender los conceptos que serán capaces de usar fuera de la clase porque conocerán y entenderán las ideas matemáticas y cómo éstas se vinculan entre sí.

Conclusión

En este capítulo he comentado más acerca de cómo implicar a los alumnos en el proceso de aprendizaje. Cuanto más se les pide que hablen sobre los conceptos matemáticos, y utilicen palabras y expresiones matemáticas, más podrán usar, dominar y vincular estas ideas y valorarán de manera más precisa su capacidad para hacerlo. Incluir a todos los alumnos y alumnas en el discurso de la clase no es una tarea fácil ni sencilla y lleva su tiempo. Tanto el profesor como los estudiantes necesitan llegar a un acuerdo sobre su nuevo papel en la clase. El profesor debe aprender a usar la parte oral y mental en menor medida, y a adoptar un papel en el que gestione, planifique actividades y establezca la actitud adecuada para que sean los alumnos quienes hablen, piensen y aprendan pues han de adoptar un papel activo y ser capaces de asumir la responsabilidad de tomar medidas para avanzar en su propio aprendizaje.

CAPÍTULO VI

La fuente de ideas: Profundizar en la teoría

Introducción

En este capítulo explicaré la base teórica de las ideas que he desarrollado en capítulos anteriores. Examinaré por qué el ejercicio de la enseñanza debería cambiar de la manera que he defendido y cuáles serían los resultados esperados de dichos cambios. Mostraré el vínculo existente entre el lenguaje y el aprendizaje en matemáticas haciendo uso de la literatura disponible.

La teoría exigía un cambio en el ejercicio de mi profesión y comprendí cómo este cambio podía conferir poder a mis alumnos, y posteriormente a los de otros profesores para usar y dominar las ideas matemáticas. Considero que la base teórica es un factor importante para realizar un cambio sustancial; el profesor, con sus creencias básicas, tiene que asimilar las ideas para que el cambio no se quede sólo en la superficie. Explorar la teoría que se expone aquí puede incitar al cambio, proveer razones para hacer cambios en las prácticas de la clase y motivar para lograrlo. Sin embargo, el cambio debe ser nutrido para ser integrado, por lo que más adelante, en este mismo capítulo, explico cómo esto es posible.

En primer lugar incluyo una perspectiva general de la teoría que conecta el lenguaje con el aprendizaje, y exploro en profundidad los vínculos específicos entre el lenguaje matemático y el aprendizaje. Defino el término "comunidad de discurso (matemático)" y explico por qué es una terminología útil para una clase en la que el uso del lenguaje es la herramienta de aprendizaje primordial. Prosigo para examinar el fundamento teórico de la Evaluación para el Aprendizaje y reviso brevemente varias teorías de cambio.

Una perspectiva general de la teoría que vincula el lenguaje con el aprendizaje

Desde mi punto de vista, las consecuencias de efectuar los cambios que he propuesto consisten en que la clase se convierte en una "comunidad de discurso", donde el sentido de éste es progresar en el aprendizaje de las matemáticas. El discurso tiene diversos significados y utilidades; aquí lo uso para definir los procesos a través de los cuales los grupos de estudiantes se comunican entre sí (ver por ejemplo CAZDEN, 1986 y PIMM, 1996a). Por tanto, en una clase de matemáticas el discurso puede incluir muchos aspectos, tales como un intercambio oral de ideas o respuestas escritas del profesor y de los alumnos. El discurso cubre todo el ámbito de la comunicación de ideas basadas en el lenguaje utilizado en la clase, que es "lenguaje tal como se usa para desarrollar la vida intelectual y social de una comunidad" (MERCER, 1995, pág. 79).

También utilizo el término "comunidad de discurso" porque parece evocar las diversas facetas de un entorno escolar que resulta ventajoso para el progreso del aprendizaje matemático. El término ha sido utilizado durante algunos años en EE.UU. (ver por ejemplo WERTSCH y TOMA, 1995; SILVER y SMITH, 1996; SHERIN, 2002). En particular, se usa para describir una clase de matemáticas que se des-

envuelve según el modelo defendido por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (*National Conseil of Teacher of Mathematics,* NCTM, 1991) al “apoyar, hacer y hablar de matemáticas”. En concreto, en tales comunidades se espera que los alumnos manifiesten y expliquen sus ideas, y respondan a los pensamientos expresados por otros miembros de la clase. Los profesores intervienen de forma que facilitan tales diálogos o intercambio de ideas. El discurso así expuesto en la clase es “diverso y abundante” (NCTM, 2000).

Mi reclamo de un mayor uso del lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas tiene un historial de fondo. El primer tema del *National Curriculum* (Plan de Estudios Nacional) para las Matemáticas (DfES, 1989) exigía que los alumnos hablaran de su trabajo, y respondieran e hicieran preguntas matemáticas. Esto estaba basado en el informe Cockcroft (Cockcroft, 1982), que defendía estrategias que mejoraban la comunicación matemática en la clase, y el informe “Matemáticas para edades entre 5 y 16 años” que afirma: “En su sentido más amplio, las matemáticas proveen un medio para organizar, comunicar y manejar información. El lenguaje matemático consiste en diagramas y símbolos con convenciones y teoremas asociados” (DES/WO, 1988, pág. 3). El lenguaje sirve fundamentalmente para aprender matemáticas; cuanto mejor uso hacen los alumnos del lenguaje matemático, mejor podrán mostrar sus conocimientos matemáticos. Es decir, serán evaluados como matemáticos más competentes. La enseñanza de las matemáticas comienza y prosigue con el lenguaje, avanza y se atasca por el lenguaje, y los resultados a menudo se evalúan mediante el lenguaje (Durkin y Shire, 1991, pág. 1).

Morgan (1995) demostró que el modo en que los alumnos representan su actividad matemática personal en los textos que producen, es crucial para tener éxito en las matemáticas. Su habilidad para describir su razonamiento y los patrones que observan en las actividades matemáticas en

un estilo convencional matemático, puede ser un factor clave para su éxito en el *Key Stage 3* (un examen que se realiza a los alumnos de 14 años en Inglaterra) y probablemente más importante en el *General Certificate of Secondary Education,* GCSE (examen realizado a los alumnos de 16 años en Inglaterra y en Gales). Si los alumnos son capaces de escribir en un estilo impersonal y convencional sobre el proceso que han realizado al elaborar sus tareas de matemáticas, su trabajo probablemente será evaluado de manera más positiva que el de los alumnos que describan los mismos procesos matemáticos pero sin destreza y en un estilo convencional. Por tanto, la capacidad de comunicar información de una manera precisa y estructurada al usar el estilo conciso e impersonal que es convencionalmente matemático, es importante para el éxito de los alumnos.

La teoría de que los alumnos serán evaluados como mejores matemáticos cuanto mejor uso hagan del lenguaje matemático también se predica en las teorías de GERGEN (1995), quien afirma que los mejores estudiantes usan el mismo discurso que utilizan los matemáticos cuanto más "matemáticos" se hacen, es decir, cuanto más probabilidades tienen de convertirse en alguien que puede resolver problemas mediante el uso de las matemáticas. Existen otras teorías que ensalzan la importancia de aprender a expresarse como un matemático con objeto de adoptar la identidad de un matemático (ver por ejemplo HOLLAND y cols., 1998, LAVE y WENGER, 1991, WENGER, 1999). Cuanto mayor número de alumnos sean capaces de "hablar como matemáticos", mejor podrán adoptar dicha identidad y, como consecuencia, tendrán mayor conciencia, al igual que otros, de haber aprendido matemáticas. Por tanto, una de las ventajas del lenguaje utilizado para expresar las ideas matemáticas es la de convertirse en alguien que es capaz de "hacer" matemáticas. Es el vehículo a través del cual los alumnos llegan a considerarse capaces de usar y dominar los conceptos matemáticos.

Una clase es una comunidad que tiene una cultura particular creada por el profesor y los alumnos, y también por el tema que se aprende. Aprender matemáticas puede definirse como adquirir cultura en matemáticas. Según el punto de vista “científico” o “tradicional”, las matemáticas forman una entidad de conocimiento fija e inmutable, pero en realidad constituyen una tradición que constantemente se “reformula y se reconsidera” (EVANS y TSATSARONI, 1994, pág. 169) por una comunidad de personas que piensa y desarrolla un sistema de conocimiento que son las matemáticas. Los alumnos se culturizan en la comunidad matemática cuando elaboran deliberadamente nuevas formas de organizar su experiencia o de reflexionar sobre la organización, estrategias y conceptos que ya han desarrollado. Esto podría consistir en una búsqueda de patrones y de coherencia, o un intento de generalizar o formalizar métodos, descubrir conexiones en el sistema y desarrollar argumentos lógicos para usar, probar y compartir sus resultados. Estas prácticas, puesto que tienen su origen en el lenguaje, se pueden denominar prácticas del discurso matemático.

Lenguaje matemático y teorías de aprendizaje

El debate sobre las teorías de aprendizaje debe comenzar con el constructivismo radical, tal como lo explica VON GLASERFELD (1984), quien se basó en el trabajo de PIAGET. El constructivismo muestra cómo los alumnos encuentran un sentido a lo que les ocurre al “construir” el mundo de forma activa para ellos mismos. Desestima el modelo de transmisión de aprendizaje —según el cual, el conocimiento debe ser transmitido al alumno desde una fuente externa— y, en su lugar, plantea que cada individuo ha de crear su propio conocimiento (VON GLASERFELD, 1987). Para que tenga lugar el aprendizaje, cada alumno ha de reorganizar conscientemente su propio sistema cognitivo actual para acomodar la

nueva experiencia. Si la nueva experiencia se encuentra demasiado alejada del marco actual del estudiante, la adaptación o la asimilación no pueden tener lugar y el alumno no adquiere el conocimiento (LERMAN, 2000).

Sin embargo, las nuevas experiencias vividas por los alumnos en la clase son casi siempre mediadas, al menos en parte, por el lenguaje implícito en el marco social y cultural, y el rol del lenguaje, de la comunidad, o del profesor no están lo suficientemente claros en las teorías constructivistas.

> Puesto que los profesores y los alumnos pueden construir sus propios significados para las palabras y acontecimientos en el contexto de una interacción en curso, es perfectamente evidente por qué la comunicación a menudo se interrumpe, o por qué los profesores y alumnos con frecuencia no se entienden. Es preciso tener en cuenta este problema del constructivismo para lograr una buena comunicación.
>
> (COBB, 1988, pág. 92.)

Las teorías socioculturales sitúan el lenguaje en el núcleo del aprendizaje, ya que el lenguaje es el principal mediador de la interacción social. VYGOTSKY (1962), WERTSCH (1985), BRUNER (1996) y WOOD, COBB y YACKEL (1995) han argumentado sobre cómo los niños aprenden a situarse en la sociedad a través de la transmisión de sus compañeros más competentes usando herramientas y símbolos, muchos de ellos lingüísticos, que forman parte del mundo social. Es decir, los niños desarrollan "funciones mentales más elevadas" (VYGOTSKY, 1981, pág. 162) a través de interacciones sociales que tienen lugar de forma predominante, pero no exclusiva, en el lenguaje verbalizado. Para los socio-culturalistas, el aprendizaje es representado como un individuo que está cada vez más capacitado para ocupar su lugar en una cultura, o ser "culturizado" a través de prácticas sociales. Por tanto, en una clase los proyectos deben permitir que cada individuo desarrolle su propio aprendizaje indivi-

dual al implicarlos en el desarrollo del conocimiento de una determinada comunidad. De acuerdo con las teorías socioculturales, las funciones del desarrollo de los alumnos primero tienen lugar entre personas como una categoría interpsicológica y sólo más tarde como una categoría intrapsicológica, como una función mental asimilada (VYGOTSKY, 1981). Es decir, tales funciones ocurren inicialmente en un ambiente social cuando se interacciona con otras personas.

> Es necesario que todo lo interno en formas más elevadas sea externo, es decir, para otros era lo que es ahora para uno mismo. Cualquier función mental más elevada atraviesa necesariamente por una fase externa en su desarrollo porque inicialmente es una función social... Cualquier función mental más elevada ha sido externa porque ha sido social en algún momento antes de ser una función mental realmente interna.
> (VYGOTSKY, 1981, pág. 162.)

Por tanto, la comunicación satisfactoria en una clase es vital para aprender y, puesto que las dificultades del lenguaje en matemáticas pueden traducirse en una barrera para dicha comunicación, es esencial que el profesor reduzca estos inconvenientes. Las teorías socioculturales proveen el ímpetu para considerar formas de mejorar la habilidad de los alumnos para usar el lenguaje en las clases de matemáticas.

Una comunicación favorable promueve una comunidad de aprendices que desarrolla una voz y un conocimiento en común (WOOD y YACKEL, 1990; MERCER, 2000; DANIELS, 2001). Establecer una comunidad invoca los conceptos de las comunidades que ejercen las teorías prácticas sociales, en particular, las ideas de LAVE y WENGER (LAVE y WENGER, 191, WENGER, 1999). El marco conceptual de LAVE y WENGER de teoría práctica social surgió de su experiencia con aprendices. Observaron cómo los estudiantes llegaban a conocer

las prácticas de la comunidad mediante el proceso de "una participación periférica legítima". Tales ideas no se transmiten fácilmente en una clase. Un alumno aprende matemáticas en el ámbito de la comunidad de la clase y no lo hace para ser profesor de matemáticas, ni siquiera para ser un profesional de las matemáticas, aunque cualquiera de estas opciones sea el resultado final para unos cuantos. Sin embargo, muchas nociones inherentes a la teoría práctica social son primordiales para desarrollar una comunidad de aprendizaje en una clase de matemáticas. "La capacidad de adquirir conocimiento es una función propia de con quién estamos, dónde estamos, sobre qué y con qué actuamos, y todas las historias, emociones, relaciones sociales y de poder integrados en estos aspectos interrelacionados del ser" (ADLER, 2000, pág. 35). Cambiar la capacidad de adquirir conocimiento de un individuo implica una interacción con los recursos de una comunidad y depende de su transparencia para los participantes. Los objetos mediadores tienen que ser invisibles si han de apoyar la visibilidad del contenido del tema. El diálogo entre alumnos, por ejemplo, es un recurso de la comunidad de la clase y se puede emplear para incrementar la capacidad de adquisición de conocimiento. Para permitir la capacidad de adquisición de conocimiento en matemáticas, los alumnos primero han de conocer las normas de diálogo de la clase, que entonces quedarán ocultas. Esto es válido respecto a muchos de los recursos de la clase. Existe una interacción compleja entre la visibilidad y la invisibilidad de los recursos requeridos para el funcionamiento efectivo en un contexto de aprendizaje. Para incrementar el acceso al ejercicio del aprendizaje de matemáticas, las actividades deben estar organizadas de manera que permitan que los objetos mediadores —por ejemplo el uso del lenguaje matemático o de herramientas físicas— se hagan invisibles para hacer visible el significado matemático para los participantes en la práctica de aprendizaje de matemáticas.

Las teorías de LAVE y WENGER también revelan más acerca de la importancia del diálogo en un contexto de aprendizaje. Describen dos maneras diferentes de hablar: hablar “desde dentro” y “hablar sobre”. La participación plena en una práctica implica el ser capaz de hablar como un participante en pleno derecho. En este contexto, aprender matemáticas entraña aprender a hablar como un matemático, algo que coincide con las teorías de otros autores —por ejemplo, las de MERCER (1995), PIMM (1991) y LABORDE (190)— y con la teoría de la construcción social de la identidad, de GERGEN. LAVE destaca por su teoría de “hablar desde dentro” (hablar como parte de hacer) y “hablar sobre” (reflexionar sobre) y en el momento que uno es capaz de ejercer estos convencionalismos es cuando tiene lugar la capacidad de adquisición de conocimiento. El estudiante aprende a hablar participando plenamente en la comunidad al involucrarse en las prácticas de la misma. Por tanto, desde este punto de vista, el discurso en la clase es una herramienta de aprendizaje, pero solamente cuando involucra al aprendiz de una forma activa; los propios alumnos necesitan hablar tanto “dentro de” como “sobre” la práctica de matemáticas. Es importante que sean motivados tanto para hablar dentro de las actividades matemáticas como sobre las mismas y ayudarles a entender el procedimiento.

La teoría de práctica social también revela que los alumnos llegan a la clase como parte de diversas comunidades en las que han formado sus identidades, las cuales deben reestructurar en la medida en que participan en la comunidad de la clase. Es en esta reestructuración de la identidad donde reside el aprendizaje. En la teoría de la práctica social (WENGER, 1999), llegar a conocer algo nunca es independiente de convertirse en algo. La teoría de práctica social trata del conocimiento y de aprender, de modo que cognición e identidad están vinculadas mientras se forma parte de la comunidad. Los problemas de transmisión de conocimientos se explican, en parte, por estas teorías, ya que el conocimiento

está integrado en la comunidad en la que nos encontramos. Es difícil usar las matemáticas en la comunidad de las clases científicas, puesto que saber matemáticas está ligado a formar parte de una comunidad que estudia matemáticas.

"Las identidades se construyen en el contexto de una actividad, los alumnos desarrollan una identidad, que es una forma de explicarse en la comunidad en la que toman parte" (HOLLAND y cols., 1998, pág. 270). Enseñar a los alumnos a adoptar la identidad de alguien que es capaz de usar las ideas matemáticas para resolver problemas, es un objetivo importante para una clase de matemáticas. GERGEN (1995) considera que "conocer" sólo puede existir cuando se forma parte de una comunidad, y que para poder decir "sé matemáticas", uno debe adoptar una postura que esté en concordancia con el punto de vista de la autoridad impuesta por la comunidad social de matemáticos. "La postura idónea no es conocer bien un tema, sino saber cómo producir un lenguaje que esté en concordancia con el estatus" (GERGEN, 1995, pág. 31). Es decir, un individuo adopta la identidad de un matemático, alguien que "sabe matemáticas", cuando aprende a hablar como un matemático.

Evaluación para el Aprendizaje

La base teórica de la Evaluación para el Aprendizaje o la evaluación formativa está bien expresada por otros autores, en particular en BLACK y WILLIAM (1998a) y BLACK y cols. (2003). Sin embargo, aquí quiero explicar cómo algunas maneras de mejorar la habilidad de los alumnos para usar el lenguaje componen un ingrediente esencial para el uso efectivo de la Evaluación para el Aprendizaje.

Un componente clave de la evaluación formativa es el concepto de retroalimentación que es una característica esencial de cualquier sistema que proponga producir un cambio, ya sea en las fases de aprendizaje o de cualquier

otra. Una característica vital de la evaluación formativa es que la información es utilizada; si ésta no cambia el nivel de conocimiento, habilidad o comprensión de los alumnos, entonces la retroalimentación no es formativa. Por tanto, si los alumnos no entienden el lenguaje en el que se expresa la información, no hay retroalimentación. Si toman parte de forma regular en el discurso en el que se desarrollan y se comparten las conclusiones, se proporcionan los mecanismos utilizados para la retroalimentación y entonces los alumnos pueden avanzar en su aprendizaje.

Otra base teórica de la evaluación formativa procede de SADLER (1989), quien señaló que el centro de la actividad de la evaluación formativa reside en la secuencia de dos acciones. La primera es la percepción del estudiante de una laguna entre el objetivo deseado y el actual estado del conocimiento y/o comprensión y/o habilidad del alumno. La segunda es que la acción es llevada a cabo *por el aprendiz* para llenar esa laguna y adquirir el objetivo deseado. Esto implica que primero el estudiante tiene que tomar conciencia de la evidencia de la laguna y después ser capaz de tomar medidas basándose en esta evidencia. El alumno es un participante activo en este proceso al realizar los vínculos complejos entre la evidencia de la laguna, la selección entre las diferentes medidas que podrían llenar la laguna, y la siguiente actividad formativa. Estos argumentos dejan claro que la autoevaluación es una característica esencial en la práctica de la evaluación formativa.

Los procesos de retroalimentación, cuestionamiento y autoevaluación no tienen lugar con efectividad sin compartir el significado en una clase. Los alumnos deben proceder para llenar las lagunas en su lenguaje y deducir cómo han de hacerlo. Si la comprensión del lenguaje que utilizan de forma rutinaria en la clase es pobre o si raramente toman parte en el proceso de elaboración de definiciones, no podrán desarrollar el nivel de eficacia que exige la evaluación formativa. La evaluación entre iguales exige una habilidad por parte de

los estudiantes para usar el lenguaje matemático. Tienen que dialogar, entender y evaluar el trabajo de otros con ayuda de los criterios establecidos. La evaluación entre compañeros es una herramienta muy útil para aplicar la Evaluación para el Aprendizaje porque desarrolla la habilidad de los alumnos para auto evaluarse; es decir, entender la evidencia del estado actual de su conocimiento, destrezas o entendimiento, y tomar medidas para llenar la laguna entre su estado actual y el objetivo deseado.

La investigación emprendida sobre la evaluación formativa (BLACK y cols., 2002, 2003) mostró que existen vínculos estrechos entre la manera de desarrollar la práctica de la evaluación formativa y el concepto que tiene el profesor de su rol. Los cambios profundos tanto en las percepciones de los profesores de su propio papel en relación a sus estudiantes, como en la forma en que percibían una buena práctica de clase, a menudo eran necesarios antes de garantizar que habían establecido buenas prácticas de evaluación formativa. Las características principales de estos cambios eran las siguientes:

- Para aumentar la retroalimentación entre los que recibían las enseñanzas y el profesor, había que desarrollar nuevas formas de pedagogía. En particular, se desarrollaron proyectos que incrementaron el nivel del discurso en la clase para que hubiera más información disponible a nivel de entendimiento, destreza y/o conocimiento que los alumnos tuvieran en ese momento, y sobre cómo avanzar en el aprendizaje. Los profesores y los alumnos “ya no tenían que adivinar”; contaban con la información para emprender la acción apropiada.
- Los profesores cambiaron sus hipótesis sobre los planteamientos que pudieran derivar de un aprendizaje efectivo. En concreto, llegaron a comprender que los alumnos debían estar activamente implicados en el proceso de aprendizaje.

- Para usar las evaluaciones hechas tanto por el profesor como por el alumno de manera formativa, había que emplear la información adquirida para adaptar las siguientes actividades de aprendizaje, para lo que el alumno debía estar implicado y tener cierto control sobre este proceso.
- La evaluación afecta tanto a la motivación como a la autoestima de los alumnos; es una parte significativa del desarrollo de la identidad de un estudiante. La autoevaluación juega un papel significativo en el aumento de la motivación y la autoestima.

Una conclusión importante de la literatura sobre Evaluación para el Aprendizaje es que los cambios duraderos no se hacen de forma inmediata ni sencilla. Los cambios profundos en la práctica como resultado del *Kings Medway Oxfordshire Assesment Project** (KMOFAP) tuvieron lugar tras un período significativo, y con el respaldo de investigadores y otros profesores del grupo (BLACK y cols., 2003).

> El progreso de la evaluación formativa no es una tarea simple. No hay resultados inmediatos añadidos a la práctica existente con la promesa de una compensación rápida. Por el contrario, sólo se podría asegurar una compensación sustancial, si el profesor descubre su propio método para incorporar las lecciones e ideas establecidas con anterioridad en sus pautas de trabajo en el aula. Esto sólo puede ocurrir de un modo relativamente lento y a través de programas sostenidos de desarrollo y apoyo profesional. Esto no resta importancia al mensaje que aquí se transmite, de hecho podría ser un indicio de autenticidad, ya que las mejoras duraderas y sólidas en la enseñanza y el aprendizaje sólo pueden tener lugar de este modo.
>
> (BLACK y WILLIAM, 1998n, pág. 15.)

* Proyecto de Evaluación Formativa de Kings Medway Oxfordshire. *(N. del T.)*

PERRENOUD expresa un punto más importante sobre la evaluación formativa, así como acerca de las respuestas de los alumnos a los cambios producidos en el ejercicio de la enseñanza.

> Numerosos alumnos no aspiran a aprender lo máximo posible, sino que se contentan con aprobar, pasar el curso, el día o el año sin muchos desastres, y tener tiempo para otras actividades aparte de las tareas de clase... La evaluación formativa presupone de forma invariable un cambio en este punto de equilibrio hacia más trabajo escolar, una actitud más seria hacia el aprendizaje... Todos los profesores que quieren poner en práctica la evaluación formativa *deben rehacer los contratos de enseñanza para modificar los hábitos adquiridos por sus alumnos.* Más aún, algunos de los niños y adolescentes a quienes enseñan están aprisionados en la identidad de un alumno malo y adverso.
>
> (PERRENOUD, 1991, pág. 92 *.)

Los alumnos podrían mostrar resistencia a tomar parte en cualquier cambio, no solamente por el deseo de hacer el mínimo esfuerzo, sino también por miedo e inseguridad. Otra cuestión podría ser que los alumnos fracasen en reconocer la retroalimentación formativa como una señal y una guía útil (TUNSTALL y GIPPS, 1996). Las creencias de los alumnos sobre su aprendizaje y la confianza en su propia habilidad para ser aprendices prósperos (DWECK, 2000) tienen una enorme influencia en su capacidad para involucrarse en el proceso de aprendizaje. Por tanto, el desarrollo minucioso de la confianza de los alumnos para que tomen parte en el discurso de una clase de matemáticas, es una herramienta valiosa para capacitarles a usar la evaluación de un modo formativo y aumentar su aprendizaje.

---

* La letra cursiva es iniciativa de la autora. *(N. del T.)*

La clase de matemáticas como discurso de la comunidad

El discurso es una herramienta de aprendizaje

El discurso se reconoce como una importante herramienta de aprendizaje. "El acto de formular ideas para compartir información y argumentos para convencer a otros es una parte significativa del aprendizaje. Cuando se intercambian las ideas y son sometidas a críticas razonadas a menudo éstas son perfeccionadas y mejoradas" (NCTM, 2000, pág. 348). Pedir a los alumnos que articulen sus ideas fuerza la actividad metacognitiva y de esta manera mejora la claridad de sus pensamientos. Las investigaciones han demostrado que pedir a los alumnos que compartan sus pensamientos matemáticos en las lecciones tiene como resultado un incremento en el aprendizaje matemático (RUSSELL y CORWIN, 1991, WORD, COBB y YACKEL, 1995). El discurso es importante porque al hacer de las matemáticas el objeto de discusión en la clase, fuerza a los pensamientos e ideas tácitas y latentes a convertirse en el foco de atención. En la medida en que los alumnos formulan sus propias ideas para que otros las puedan asimilar, hacen que sus pensamientos se manifiesten y sean tangibles para ellos mismos.

El lenguaje es una herramienta a través de la cual los alumnos desarrollan su conocimiento de matemáticas, y este conocimiento evoluciona en entornos sociales (VYGOTSKY, 1978; WERTSCH y TOMA, 1995; BRUNER, 1996). Considerar las interacciones en la clase como un discurso con el potencial de mejorar el desarrollo social del conocimiento, "desvía nuestra atención desde lo que falta en el pensamiento del estudiante a lo que falta en sus interacciones sociales" (MCNAIR, 2001, pág. 198). El discurso en la clase de matemáticas debería reflejar "un esfuerzo deliberado por aprender un concepto o un procedimiento matemático que se ha vuelto problemático" (MCNAIR, 2001, pág. 199). Además si

los alumnos dejan de dialogar sobre los procedimientos que se usan, por ejemplo, computar sus respuestas, puede que no aprendan las matemáticas que están englobadas en esos procedimientos (LAMPERT, 1988, WALKERDINE, 1997); "Aprendemos a participar no sólo en las actividades, sino en el sentido que las definen" (BARNES, 1992, pág. 128).

Los alumnos aprenden matemáticas mientras "participan en la constitución interactiva de las situaciones en las que aprenden" (COBB y cols., 1992, pág. 119). Al participar en el diálogo de la clase (WERTSCH y TOMA, 1995), los alumnos sortean cualquier contradicción entre su propia actividad matemática y la de los demás. La función de diálogo en el discurso es un mecanismo para pensar. Tanto el locutor como los oyentes adoptan una postura activa en todo lo que se dice al cuestionar y ampliar tanto las expresiones del profesor como la de sus compañeros, e "incorporarlas en sus propias expresiones externas e internas" (WERTSCH y TOMA, 1995, pág. 171).

Una comunidad de discurso matemático

Los alumnos aprenden con eficacia cuando los profesores les permiten formar parte de la comunidad de discurso matemático de la clase, al utilizar el lenguaje para desarrollar y expresar conceptos, y al estructurar el contexto social de la clase de manera que los alumnos usen el lenguaje verbal y escrito en el proceso de aprendizaje de matemáticas.

SILVER y SMITH emplean el nombre "comunidad de discurso matemático" para describir una clase en la que:

> El papel del profesor se diversifica para acoger propuestas de tareas de matemáticas comprometidas y valiosas; gestionar la actividad intelectual de la clase al integrar el discurso, ayudar a los alumnos a entender las ideas matemáticas, y verificar su

> propio entendimiento. Se espera que los alumnos se impliquen en las matemáticas mientras participan activamente en el "discurso de la comunidad".
>
> (SILVER y SMITH, 1996, pág. 20.)

Para que los alumnos se involucren en la investigación y en el discurso sobre ideas y conceptos matemáticos se deben dar varias condiciones. La principal es un ambiente de confianza y respeto. "Salvo que el ambiente de la clase sea seguro para pensar y hablar, los alumnos mostrarán resistencia a proponer sus ideas e hipótesis, a cuestionar afirmaciones que son confusas o a compartir sus interpretaciones alternativas" (SILVER y SMITH, 1996, pág. 22). Es importante que el discurso en esta comunidad "segura" vaya más allá de "decirte cómo lo hiciste" o "dar la respuesta".

Una clase de matemáticas es una comunidad en la que se acuerda ejercer el aprendizaje de esta materia. El aprendizaje y la enseñanza de matemáticas en la escuela es una práctica social muy específica. Es una comunidad de discurso matemático, o por decirlo de un modo más apropiado, un conjunto de discursos, ya que existen muchos discursos que inciden en la clase establecida en otras prácticas sociales específicas. El lenguaje que se utiliza en la clase de matemáticas en parte constituye el registro matemático (PIMM, 1987), pero también comprende discursos de otras comunidades, tales como las comunidades sociales de los alumnos. Al aprender matemáticas, existen puentes que cruzan desde el discurso utilizado de forma rutinaria en la clase hasta el discurso de una comunidad matemática más amplia. Estos puentes son importantes y problemáticos. Si el puente entre el discurso que los alumnos usan en su propio ambiente social y el que se les exige en la clase de matemáticas es tan difícil de cruzar, no serán capaces de tomar parte en el discurso de la clase.

El discurso culto y pedagógico

El *discurso pedagógico* es el discurso utilizado para enseñar y aprender en la clase, la forma particular de hablar en el aula. En una clase de matemáticas la frase “Haz el ejercicio número 5” no conlleva ninguna esfuerzo físico aparte de escribir y pensar. Todos los alumnos se implican de alguna manera en este discurso. El *discurso culto* en el caso de las clases de matemáticas se puede considerar como el discurso de las comunidades de matemáticas más amplias. Entraña nuevas formas de usar el lenguaje que permite a los alumnos participar en los discursos de comunidades más extensas de nuestra sociedad consideradas “cultas”. En la clase de matemáticas los alumnos adquieren cultura cuando emplean con fluidez el registro matemático con el propósito de comunicar ideas matemáticas.

El papel del profesor es capacitar a los alumnos para participar en este discurso culto, y los problemas de acceso y alienación que pueden formar parte de la actual enseñanza de matemáticas se pueden atribuir, al menos en parte, a un fracaso en hacer esto adecuadamente.

> El objetivo fundamental de la educación no es conseguir que los estudiantes tomen parte en los intercambios convencionales del discurso pedagógico, aunque se les exija a lo largo de su educación. Es conseguir que desarrollen nuevas formas de usar el lenguaje para pensar y comunicarse, “formas con palabras”, lo cual les permitiría ser miembros activos de las comunidades más extensas del discurso culto.
>
> (MERCER, 1995, pág. 80.)

Al hablar de sus ideas matemáticas, los alumnos tienen la oportunidad de ensayar como usuarios del discurso culto. El discurso de “matemáticos cultos” puede no ser fácilmente transmitido a la clase, salvo que el profesor incluya el lenguaje y los marcos de referencia del discurso “experto” en el

discurso. "El papel del profesor es traducir lo que se dice a un discurso académico con el propósito de ayudar a enmarcar el diálogo, plantear preguntas, sugerir conexiones con la vida real, explorar argumentos y pedir pruebas" (ADLER, 1998, pág. 174).

La participación de los alumnos en el discurso matemático utilizando el registro matemático crea problemas y retos significativos para un profesor. Existe la necesidad de construir una pedagogía enfocada a estos problemas de participación en el discurso de clase, al registro matemático y a las situaciones sociales, y centrarse en formas de permitir que todos participen sin los problemas concomitantes de alienación para algunos estudiantes.

Los alumnos de la clase serán miembros de otras comunidades aparte de la clase de matemáticas: la escuela, el entorno familiar, las lecciones de ciencia, etcétera. Motivar el discurso en la clase de matemáticas es un objetivo que confiere poder a los alumnos para acceder también a estas comunidades al igual que a la comunidad de matemáticas más extensa. La labor de la clase de matemáticas es trabajar dentro de los límites y oportunidades de otras comunidades de manera que facilite el aprendizaje de matemáticas. Cuando los alumnos son capaces de pensar y comunicarse con estas nuevas formas de utilizar el lenguaje que componen el registro matemático, entonces se puede decir que emplean un discurso culto. Esta es otra forma de considerar que alguien ha aprendido matemáticas.

El pensamiento y el discurso están estrechamente ligados al proceso de aprendizaje

Según SFARD (2000, 2001) la comunicación no se debería considerar una simple ayuda para el pensamiento, sino "prácticamente el equivalente al pensamiento en sí". La comunica-

ción y la participación están vinculadas; la participación en una comunidad exige comunicación con otros participantes. Aprender es lo primero y lo más importante en cuanto al desarrollo de formas en las que un sujeto participa en actividades comunales bien establecidas, en este caso, una clase de matemáticas: "Por consiguiente, las prácticas se deberían ver como una formación del discurso matemático en la que lo que cuenta y lo que resulta es un conocimiento válido así como una participación eficaz" (LERMAN, 2001, pág. 100).

El deseo de participar en las prácticas discursivas es uno de los principales motivos para aprender (SFARD, 2001, pág. 49). El pensamiento, el discurso y el aprendizaje están vinculados en una compleja representación del aprendizaje, como una participación en las prácticas de discurso de una comunidad que en sí misma formula normas meta-discursivas que guían el curso general de la comunicación. Parte del papel del profesor es mediar las normas meta-discursivas y por tanto facilitar la participación de sus estudiantes en la comunidad. Los alumnos aprenden más mientras se esfuerzan por comunicarse; comunicar es pensar y el discurso es un fuerte propulsor en el proceso de aprendizaje.

Cambios en el papel del profesor y del alumno en una comunidad de discurso matemático

Uno de los resultados de fomentar el uso del lenguaje matemático en el aprendizaje es que cada vez son más los profesores que involucran a sus alumnos en la conversación; así es como mejor llegan a conocer a sus estudiantes y éstos conocen a su profesor. La relación cambia radicalmente. Las lecciones se convierten en empresas comunes en la lucha por saber y entender más sobre matemáticas.

La relación de los profesores con sus clases a menudo es unilateral. Mantienen un control estrecho sobre lo que se dice

o hace en las aulas, intentan averiguar o adivinar lo que podría favorecer más el aprendizaje, pero no esperan que los alumnos tengan una opinión ni que reflexionen sobre su propio aprendizaje. Cuanto más los involucran en el discurso de la clase, más se asocian con ellos en una empresa común para aprender más sobre matemáticas. Cada alumno se convierte en un miembro valorado de una comunidad de aprendizaje que habla y comparte sus ideas sobre matemáticas. Los estudiantes empiezan a aceptar parte de la responsabilidad de la constitución de la comunidad y esto permite que el profesor responda mejor a las necesidades de su aprendizaje.

El papel del profesor

El papel del profesor en el discurso de una clase de matemáticas es facultar a los alumnos para dominar el lenguaje que se utiliza para expresar los conceptos matemáticos. Para que alumnos y alumnas puedan emplear y dominar las ideas matemáticas, tienen que ser capaces de articular y discutir sobre estos conceptos. Por tanto, gran parte del rol de un profesor de matemáticas es enseñar a los alumnos las normas de un discurso matemático (SFARD, 2000). El papel del docente se puede explicar de la siguiente manera:

> La mayor parte del tiempo al profesor se le puede considerar como un representante de la historia cultural de las matemáticas y como tal debe tomar parte en el discurso de la clase: no sólo como guía cuando el proceso se desvíe, sino también como participante, al sugerir posibles soluciones, estrategias, conceptos, etc.
>
> (VAN OERS, 2001, pág. 74.)

Por lo tanto, los profesores tienen diversos roles en una clase de matemáticas en la que se utiliza el discurso; planifi-

car preguntas y actividades que faciliten el entendimiento de los alumnos, escuchar, evaluar y entender, etc. Sin embargo, uno de los roles más importantes es el de participante en un discurso en el que se elaboran definiciones y se instruye a los alumnos para usar formas de expresión que son propias de las matemáticas, así como para tomar parte en el discurso de aprendizaje. El profesor deberá configurar formas de usar el lenguaje matemático para que los alumnos sepan cómo se aplica, al igual que establecer actividades que les exijan el uso de las palabras y expresiones matemáticas. Su papel es permitir que los alumnos sepan que han aprendido a usar y a dominar las ideas matemáticas, lo cual sucede cuando ellos mismos logran articular y dialogar dichas ideas.

El rol del profesor cambia de un modo más sutil y abierto cuando usan el discurso matemático como un modo de educar a sus alumnos en las matemáticas. Los docentes toman parte en el discurso y, por tanto, son capaces de evaluar la comprensión de cada individuo y tomar medidas más precisas. La Evaluación para el Aprendizaje se engloba totalmente en el quehacer del día a día de la clase. Los profesores llegan a conocer bien a sus alumnos en la medida en que hablan y aprenden juntos, y están preparados para planificarse, al igual que para satisfacer sus necesidades y preferencias reales, se vuelven más receptivos para sus alumnos y advierten que están enseñando mejor, por lo que a menudo les satisface más su trabajo.

> He vuelto a disfrutar de la enseñanza... Ya no me enfrentaba a montones de ejercicios para corregir. Estaba deseando utilizar mi creatividad para planificar la clase del día siguiente... Me centraba en la comprensión de las chicas y no en su comportamiento. A menudo descubría que su comprensión iba acompañada de un mejor comportamiento.
>
> (Gwen.)

Pensar en el discurso y en las comunidades de discurso vuelve a contextualizar el papel del profesor. Su trabajo parte del discurso con el que los alumnos ya se sienten cómodos y provee formas para que integren el discurso culto de la comunidad matemática más amplia.

> Se pretende que los profesores ayuden a sus estudiantes a desarrollar formas de hablar, escribir y pensar que les permita hacer viajes intelectuales más amplios, al entender y ser entendidos por otros miembros de comunidades más extensas del discurso pedagógico.
>
> (MERCER, 1995, pág. 83.)

Contemplar la clase como una comunidad del discurso matemático, significa que el profesor tiene la certeza de que todos pueden formar parte y asimilar las formas de comunicación que se utilizan. La responsabilidad recae sobre el profesor para garantizar que la comunidad comparte una serie de objetivos en común, que se incluye información y retroalimentación en su práctica y que todos comparten la comprensión del registro matemático que es la base de su comunicación. Los alumnos llegan a la clase con un discurso desarrollado en su propio entorno social, es decir, con su propio lenguaje natural. No pueden participar en un discurso culto de matemáticas sin ayuda, práctica y motivación. Esto requiere que las actividades de la clase se constituyan de manera que permitan a cada miembro participar en el discurso "al ofrecerles acceso a una herencia compartida de imágenes e ideas matemáticas, lenguaje y simbolismo, y a las diferentes aplicaciones matemáticas que se han desarrollado hasta ahora" (PIMM, 1995, pág. 11).

Adoptar el papel de director o facilitador de una comunidad de discurso matemático exige profundos cambios en la práctica de muchos profesores, entre los que figuran los siguientes:

- distanciarse de la influencia del plan de estudios; cumplir el plan de estudios sin que se entienda no tiene sentido y puede ser perjudicial,
- cambiar sus creencias sobre las capacidades de aprendizaje de los alumnos desde algo inamovible a algo progresivo (DWECK, 2000); los profesores deben comprender que sus alumnos son capaces de mejorar con la ayuda y el apoyo adecuado,
- estimular más el discurso y el pensamiento de sus alumnos y, por tanto, hablar menos ellos mismos,
- disminuir algo el control que previamente han ejercido sobre la enseñanza y el aprendizaje, y permitir que los alumnos asuman cierto grado de responsabilidad en este proceso.

El papel del alumno

Es importante que los alumnos adviertan que su papel ha cambiado en la clase de matemáticas. Ya no se les exige ser receptores pasivos de información, sino participantes activos en el proceso de aprendizaje. Los alumnos deben tomar parte en el discurso al ofrecer sus ideas y opiniones. También tienen que asumir la responsabilidad de su propio aprendizaje, así como de lo que piensan y hablan acerca de qué y cómo aprenden.

Será más fácil para unos alumnos que para otros participar plenamente en el discurso. Para algunos es más difícil hablar en la clase. No obstante, se les invita a expresar sus ideas matemáticas para ayudar a clarificar, explorar y consolidar dichas ideas, y puedan así ser evaluadas por el profesor y por ellos mismos. La intención del proceso es ayudar a los alumnos a aprender, de manera que no puedan desentenderse de la conversación. Algunos necesitarán más apoyo que otros, y quizá una manera de hacerlo sería pedirles que expresen sus ideas matemáticas primero en grupos

reducidos. Pedirles que hablen con un compañero y después a toda la clase puede ayudar a quienes consideran que hablar es una tarea difícil. Sin embargo, la mayoría de los alumnos participará en el discurso sin sentirse presionados si el ambiente de la clase es el adecuado, es decir, si todas las respuestas son valoradas por su contribución a un discurso razonado y los participantes pueden verse y oírse con facilidad.

Los alumnos consideran que es difícil articular sus ideas matemáticas. Sin embargo, cuando les preguntan, la mayoría reconoce que es importante expresar sus ideas ya que les obliga a clarificar sus pensamientos. Para los alumnos, idear explicaciones es muy complicado y precisan ser apoyados para saber cómo utilizar correctamente el lenguaje para que otras personas puedan entenderles. Es decisivo que los profesores asuman que esto es difícil, pero que con apoyo y motivación será más fácil. En la medida en que los alumnos adquieren destreza en el uso del lenguaje para explicar sus ideas, también advierten que les es más fácil aprender matemáticas.

Además de exigir que sean los alumnos quienes más hablen en la clase, también se les requiere que sean ellos quienes reflexionen. Esto es menos sencillo de lo que parece, ya que con frecuencia los alumnos no están acostumbrados a que se les invite a reflexionar sobre las lecciones. Todas las ideas que se han sugerido en este libro apuntan a que el profesor planifique, explique y configure la tarea de aprendizaje, lo cual a su vez requiere que los alumnos piensen. Si un profesor tiene dificultad en implementar algunas de las ideas, podría deberse a que los alumnos no están acostumbrados a usar su nuevo rol con las reflexiones que todo ello implica.

Cuando los alumnos hablan y piensan sobre su aprendizaje matemático, están preparados para responsabilizarse de ello. Podrán expresarse cuando aprendan eficazmente y necesiten involucrarse en un aprendizaje más profundo o

amplio. También estarán capacitados para decirle a su profesor si tienen dificultades, o necesitan aminorar la marcha o intentar entender la lección de otro modo. Son los alumnos quienes tienen que aprender, por tanto se espera que reflexionen sobre ello y expresen cómo pueden progresar.

En una comunidad de discurso matemático, los alumnos:

- participan de forma considerable en el proceso de aprendizaje, conocen sus objetivos y el modo de conseguirlos,
- toman parte en un aprendizaje compartido, todos los alumnos están involucrados en un discurso de aprendizaje con sus compañeros,
- adquieren mayor confianza y son comunicadores eficaces,
- aprenden a trabajar y ayudan a crear una actitud en la que las dudas expresadas se reciben de forma empática como parte del discurso de aprendizaje.

Una comunidad de discurso matemático es un entorno de aprendizaje compartido. Así es cómo lo expresó un profesor:

> Todos teníamos que estar pendientes del resto, estar preparados para escuchar de forma empática, así como entender e invertir en un objetivo común que era avanzar en el aprendizaje... los estudiantes se sentían seguros tanto para dar respuestas equivocadas como para expresar libremente su falta de entendimiento... la clase dejaba de ser un hábitat en el que sólo los más brillantes sobrevivían y prosperaban, para ser uno en el que gracias a los agrupamientos estudiados y buenos cuestionamientos, cada estudiante podía sentir que progresaba en la lección.
>
> (Robert.)

El papel de los alumnos en una comunidad de discurso matemático es participar. El del profesor es permitirles tomar parte porque sabe que el aprendizaje reside en la participa-

ción. A medida que los alumnos transforman sus ideas en un lenguaje que pueda ser compartido, transforman ideas que son transitorias e indefinidas en otras más organizadas y estables, lo cual forma parte del proceso de aprendizaje. Compartir las ideas también permite que estén disponibles para ser comparadas con otras y posiblemente reformadas en unas que sean más útiles para resolver problemas matemáticos; al compartir, se enfrentan las dudas y se perfeccionan los procesos de pensamiento incompletos.

Cambiar la práctica

Para concluir este capítulo sobre la base teórica de los cambios descritos en el resto del libro, quiero examinar teorías que conciernen a los profesores durante la transición de su práctica. Muchas de las ideas descritas fueron desarrolladas inicialmente a través de la investigación activa, que es una manera poderosa de cambiar la práctica. Las ideas fueron validadas a través del trabajo con otros profesores, que se sirvieron del apoyo de colegas para desarrollar su propio concepto de una clase de matemáticas "oral y formativa". Por tanto, todos los cambios defendidos son el resultado de profesionales que procuraban mejorar el ejercicio de su profesión.

Los cambios continuos en el ejercicio suceden cuando se desafían las creencias de los profesores sobre lo que constituye una buena práctica y cuentan con la oportunidad, el tiempo y el apoyo para explorar por ellos mismos los cambios que son vitales en el "embrollado mundo de la práctica" (GRIFFITHS, 1990, pág. 43). Parece que muchas de las recientes iniciativas, por ejemplo, el *National Curriculum* (Plan de Estudios Nacional) y el *National Numeracy Strategy* (Estrategia nacional para las nociones elementales de cálculo aritmético) han propiciado una medida que no ha fomentado la práctica profesional de la reflexión (DEWEY, 1938; SCHÖN,

1991). Si el conocimiento profesional y los valores de los profesores se han de ampliar o desarrollar, será porque advierten la laguna existente entre su propia práctica actual y los valores que sustenta su imagen como profesionales de la enseñanza (WHITEHEAD, 1989; ATKIN, 1992)). Los profesores necesitan que se den las condiciones necesarias para que los cambios tengan un sentido *para ellos mismos* (FULLAN, 1991, pág. 112); sólo entonces los cambios y procesos se asimilarán como parte de los propios pensamientos y creencias del profesor sobre lo que es una buena práctica. Una comunidad de individuos con pensamientos similares sería una oportunidad adecuada. A través de la participación en dicha comunidad, los profesionales llegan a considerarse "docentes que han desarrollado el ejercicio de su profesión" (HOLLAND y cols., 1998, WENGER, 1999), y logran profundizar en lo que significa adoptar esta identidad. Participar en dicha comunidad forma parte del modo en que el cambio se produce en los valores que tienen como profesionales de la enseñanza (ELLIOT, 1987; HARGREAVES, 1998) y, por tanto, también forman parte del proceso del cambio en los objetivos que les conduce a la acción en situaciones determinadas.

Cambiar la práctica mediante la investigación-acción

La investigación acción provee una herramienta para que los profesionales revisen el ejercicio de su profesión. Los docentes que emprenden tal investigación acción se encuentran en una posición privilegiada cuando se trata de investigar, analizar datos y crear teorías. Los investigadores de la enseñanza no pueden entrar en su campo de investigación de manera imparcial (a diferencia de los psicólogos, quienes pueden entrar en campos desconocidos) porque ya viven y

trabajan en él. Los prejuicios adquiridos a través de su experiencia proveen una motivación para explorar y un conocimiento muy relevante de la situación y de los intereses con respecto a estudios posteriores. En lugar de desechar estos "prejuicios", los investigadores los tienen en consideración; los usan, elaboran y revisan durante la investigación (ALTRICHTER y POSCH, 1989, pág. 26).

Mis "prejuicios" cuando entré en este campo eran que mis alumnos no parecían aprender matemáticas tan bien como, digamos, geografía o tecnología. Tanto la geografía como la tecnología compartían algunas de las "barreras" de aprendizaje que me parecían que estaban habitualmente atribuidas a las matemáticas; por ejemplo, el lenguaje técnico, que englobaba grandes conceptos y formas algorítmicas para resolver problemas. En ambas asignaturas parecía más fácil preparar a los alumnos para superar estas barreras. Al observar las clases de geografía me pareció que los estudiantes usaban mucho más el lenguaje para expresar sus ideas. Reflexioné sobre las lecciones de tecnología y me pareció que hasta entonces los alumnos de esta clase habían tenido mayor control sobre la dirección de su aprendizaje. Tales prejuicios innatos prevalecían en mí desde hacía tiempo, de modo que cuando me llegó la teoría que expresaba la necesidad de los alumnos de usar el lenguaje para adquirir control sobre sus ideas matemáticas, ya estaba preparada con ideas y experiencias que me permitieron poner estas teorías en práctica. La experiencia me condujo a reaccionar ante lo que estaba leyendo: lo que debía trabajar era la expresión de esa teoría en las realidades prácticas de la clase.

Puede ser difícil para los profesionales que utilizan la investigación-acción distanciarse de la información que constituye su propia práctica. Existen dos modalidades de profesores que realizan la investigación-acción. Una es el docente reflexivo que plantea preguntas acerca de su ejercicio para mejorar la experiencia de sus alumnos. En la segunda moda-

lidad los investigadores plantean preguntas respecto a cuál podría ser el significado (implícito) detrás de la decisión de actuar de una manera o de otra y cómo se puede exponer. Para proveer algo de distancia, los profesionales pueden intentar separar los dos roles, la base teórica se puede exponer y la recopilación de información se puede planificar como investigador. Planificar las clases que toman en consideración el origen teórico se debe hacer como profesor (un profesor "reflexivo" preparado para tomarse tiempo para reflexionar sobre sus actos y decidir sobre acciones posteriores basadas en esas reflexiones, pero siempre como profesor), considerando la implicación del aprendizaje de esas lecciones y qué hacer después. Las notas de campo o diarios son competencia tanto del profesor como del investigador, ya que posiblemente no se escribirían de no ser porque el profesor es también investigador. Sin embargo, el profesor-investigador tiene acceso y es capaz de reflexionar sobre las intenciones e implicaciones de la acción. Mientras se generan los datos, el profesor tiene control sobre la situación y sus prioridades imperan. Sin embargo, a otro nivel, el investigador-pensador registra incidentes, hace preguntas, provoca situaciones y aprende sobre lo que es factible hacer en una clase. Puesto que la recopilación de información es planificada o los datos analizados, la disciplina del investigador tiene prioridad, pero en la fase del análisis el practicante-pensador intenta comprender, deja la ambición a un lado y aprende de lo que es revelado. "De esta manera (es decir, desplazándose desde la enseñanza hasta la investigación) se adquiere una objetividad creciente que permite que el investigador manifieste su relación con los datos, de modo que la implicación emocional no se pierde sino que es reconocida como parte del "evento" que está siendo investigado" (HATCH y SHIU, 1998, pág. 308).

La investigación-acción no se puede realizar a la ligera; es un compromiso serio, sobre todo cuando se asume como parte de un grupo de individuos con pensamientos semejan-

tes. El informe final ocupa gran parte de este tiempo, pero es un factor importante de la investigación, en parte porque la investigación es "una indagación sistemática publicada" (STENHOUSE, 1980), y porque el informe, cualquiera que sea la forma que tome, hace tangible para el profesor y para otros todas las ideas aprendidas que se incluyen en el proyecto. La investigación-acción se reconoce como una poderosa forma de desarrollar el ejercicio de la enseñanza, y hay escuelas fundadas por profesores para llevar a cabo tales proyectos y darles tiempo para hacerlo como parte de su programa de Desarrollo Profesional Continuado. Algunos profesores continuarán esforzándose para encajar la investigación y el desarrollo de su práctica en su ya apretada agenda, aunque para que esto sea difundido es preciso darles tiempo y recursos de un modo más sistemático.

Conclusión

Este capítulo ha detallado algo de la teoría que hay detrás de los cambios en el ejercicio de la enseñanza examinados en el último capítulo. La teoría es importante para cambiar la práctica profesional; los profesores siempre se arriesgarán cuando hacen cambios y por tanto necesitarán estar convencidos de que tendrán como resultado un mejor entorno de aprendizaje para sus alumnos. La literatura clara; el pensamiento y el lenguaje están estrechamente vinculados. Los alumnos aprenden a usar y a dominar las ideas matemáticas mediante el lenguaje, y la expresión obliga al pensamiento a ser menos transitorio, a estar enfocado y ser claro. Sin embargo, emplear el lenguaje matemático tiene otro efecto poderoso; mientras los alumnos hablan como matemáticos adoptan la identidad de los matemáticos. Es decir, cuando los alumnos aprenden a expresar sus ideas matemáticas de la misma manera que los matemáticos "cultos", se llegan a ver como "cultos", y son capaces de "hacer" matemáticas.

Cuando los alumnos están preparados para articular su aprendizaje matemático, tanto el estudiante como el profesor pueden hacer uso efectivo de la Evaluación para el Aprendizaje mientras avanzan en el aprendizaje de la manera más eficiente posible. La clase se convierte en una comunidad de discurso matemático en el que el objetivo consiste en aprender matemáticas; es decir, los alumnos discuten tanto las ideas que están aprendiendo como la eficacia con que las aprenden. El profesor y el alumno adoptan roles específicos en una comunidad de discurso matemático; el profesor no dicta sino que gestiona y facilita el aprendizaje. El alumno adquiere un papel activo en el proceso de aprendizaje al asumir gran parte del pensamiento y de la parte oral, y contrae la responsabilidad de su propio aprendizaje.

Cuando los profesores se convencen de que los cambios en su práctica son necesarios, deben buscar maneras efectivas de efectuar y establecer esos cambios teóricos. La investigación-acción permite que se implementen, revisen y razonen los cambios, y que constituyan una parte integrada y continuada de la práctica profesional.

CAPÍTULO VII

Ahondar en la práctica

Las ideas contenidas en este libro están enfocadas a mejorar el entorno de aprendizaje de una clase de matemáticas. Esto implica cambios en el modo en que se conducen las clases, y hasta ahora he explicado lo que esto podría acarrear. También he argumentado cómo se pueden realizar los cambios y por qué es importante. En este último capítulo examino en profundidad la idea central del libro —las comunidades de discurso matemático— y explico cómo apoyar a los profesores en el difícil proceso de transición.

Una comunidad de discurso matemático

Una clase que constituye una comunidad de discurso matemático es un lugar donde los alumnos y alumnas pueden aprender matemáticas de la manera más eficiente y eficaz posible. La clase se convierte en una comunidad de discurso matemático al establecer relaciones de confianza y respeto entre todos sus miembros, de alumno a alumno, de alumno a profesor y de profesor a alumno. Los papeles tradicionales del alumno pasivo y el profesor dictatorial se abandonan y son

reemplazados por alumnos activos que expresan las ideas que aprenden y profesores que guían su experiencia de aprendizaje. Estudiar matemáticas requiere que los alumnos aprendan a pensar de manera distinta, de un modo más abstracto y sistemático, y a comunicar estos pensamientos. En la medida en que los estudiantes comunican su pensamiento descubren hasta qué punto hacen o entienden matemáticas. Por tanto, es necesario que el profesor establezca una clase oral en la que aprendan a participar plenamente en una comunidad que comparte definiciones y elabora un lenguaje matemático.

Cuando los alumnos articulan sus conocimientos y organizan sus pensamientos adquieren la capacidad de dominar y aplicar las ideas matemáticas. Los alumnos tienen que aprender a usar el registro matemático para expresar sus ideas matemáticas de una forma efectiva. El registro matemático les permite "nombrar" los conceptos matemáticos, lo cual les hace pensar en el significado o en la red interconectada de ideas que indica dicho concepto. Cuando expresan sus ideas en una comunidad de discurso matemático, contribuyen y comparten un complejo sistema de definiciones que son generadas por la comunidad. Empiezan a considerarse sabios, y adoptan la identidad de alguien que puede usar y dominar las ideas matemáticas.

Existen muchos discursos en una clase de matemáticas. Los más importantes son: los discursos naturales de los propios alumnos, el discurso pedagógico que es el discurso que los alumnos usan como herramienta para aprender matemáticas, y el discurso "culto" que es el discurso usado por aquellos que han adquirido cultura matemática, es decir, el registro matemático. Existe otro discurso, que he definido como el estilo convencional de matemáticas, que se emplea para comunicar los conceptos matemáticos de un modo eficiente. El estilo matemático convencional es impersonal, atemporal y no redundante; usa la voz pasiva *

* Véase nota de la pág. 41. *(N. del E.)*

y es conciso. Estas características hacen que sea de difícil aplicación por los alumnos. El registro matemático no es el estilo convencional, pero sí usa el registro matemático para transmitir las definiciones matemáticas. No es vital que los alumnos utilicen el estilo convencional de matemáticas para expresar sus ideas matemáticas y es obvio que las complejidades del estilo pueden presentar una barrera para los alumnos durante el aprendizaje. No obstante, los alumnos pueden estar en desventaja si no poseen cierta capacidad para usar el estilo convencional de matemáticas porque:

- parte de ser capaz de "hacer" matemáticas es poder expresar las ideas de una manera concisa y lógica, y usar eficazmente el lenguaje simbólico,
- los alumnos necesitan tomar parte en el discurso de una comunidad matemática más amplia; para hacer esto de una manera efectiva un sujeto debe ser capaz de usar el estilo matemático convencional en una medida apropiada,
- los alumnos deben poder entender el estilo matemático convencional, ya que se usa en los exámenes y les puede servir de ayuda para la evaluación de sus propias tareas.

La enseñanza se puede considerar como un modo de introducir a los alumnos en una comunidad de conocimiento matemático. La educación matemática es conducir a los niños hacia una nueva esfera de aprendizaje, un proceso de re-culturización en el que un estudiante se mueve de una cultura a otra; "En el contexto escolar, hacer y aprender matemáticas significa mejorar las habilidades para participar en la práctica matemática tanto en la parte operacional (la tecnología simbólica de las matemáticas) como en la parte discursiva" (VAN OERS, 2001, pág. 72).

Considerar la pedagogía matemática como una participación creciente en una nueva cultura o comunidad pone de manifiesto lo complejo y difícil que es el proceso para los alumnos. La culturización subraya la importancia de aprender a participar en el discurso *al mismo tiempo* que se aprende a participar en la tecnología simbólica de las matemáticas. Recibir una formación matemática se puede apreciar como adquirir una segunda lengua que debe aprenderse en su contexto (USISKIN, 1996). Participar en esta nueva cultura significa que los alumnos tienen que adueñarse de las palabras, en lugar de repetir lo que dice su profesor. Para ayudar a los alumnos a participar en la cultura o comunidad matemática, los profesores tienen que usar planteamientos en la clase que incrementen la disposición de los alumnos a tomar parte en el discurso. Los alumnos se involucran en un proceso creativo de elaboración de definiciones y ponen a prueba sus expectativas sobre el significado o inician nuevas definiciones a partir de un proceso con objeto de "convertirse en miembro de la comunidad".

Las identidades se forman y reforman a través de la participación en una comunidad. Las prácticas discursivas permiten a los alumnos adoptar una identidad de estudiantes prósperos de matemáticas o ser participantes competentes en una comunidad de individuos que desarrolla su habilidad para usar y dominar las ideas matemáticas. "Las prácticas sociales están constituidas de un modo discursivo y las personas forman parte de las prácticas al igual que las prácticas forman parte de ellas" (LERMAN, 2001, pág. 88). La actitud de Troy en la clase cambió radicalmente. Pasó ser de un sujeto negativo y poco inclinado a resolver problemas matemáticos, a uno positivo y participativo. En la medida en que tomaba parte en el discurso, modelaba y remodelaba su identidad y las prácticas comenzaron a formar parte de él. Chantelle también redefinió su identidad a medida que comenzó a formar parte de la comunidad de discurso matemático.

Chantelle

Al inicio del proyecto, Chantelle era una chica “relativamente brillante”, pero no estudiaba “salvo que la obligaran”. Le resultaba muy difícil ponerse a trabajar, ya que siempre tenía otra cosa sobre la que charlar más interesante que las matemáticas. No pensaba en los significados de las palabras con las que se enfrentaba, y no podía identificar las palabras “números cuadrados” en su libro de texto con “el número al cuadrado” del que habíamos hablado en clase. Mis anotaciones decían: *No había hablado de números cuadrados en particular, pero muchos niños hicieron la transición desde 4 como “dos al cuadrado” a 4 como “un número al cuadrado”. No todos: Nina y Chantelle expresaron sus dudas.*

Poco a poco, Chantelle comenzó a participar más en los diálogos de la clase y a usar el discurso para avanzar en su aprendizaje. Trabajaba en un grupo reducido que investigaba sobre paquetes para contener pelotas de golf cuando registré este intercambio:

“¿Cómo podrías encajar las pelotas de golf aquí, Chantelle?” pregunté, al señalar una pirámide de base cuadrada. “¿Dos de lado a lado y uno encima?” preguntó vacilante, “Entonces, ¿un cuadrado sería la mejor forma? No, sería un rectángulo, lo cambiaré.”

Después de esta conversación Chantelle continuó trabajando en casa; expresar sus pensamientos en alto le permitió advertir sus errores y tener confianza para explorar sus ideas en profundidad. Comprendió que podía tener éxito en su trabajo y por tanto estaba preparada para realizar el esfuerzo requerido para completarlo bien. Desde entonces vi un cambio radical en su actitud hacia las matemáticas.

Chantelle empezó a jugar un papel importante en los diálogos de la clase. En una lección sobre hojas de cálculo pude confiar en ella para leer y explicar las instrucciones necesarias para hacer el trabajo. Anoté lo siguiente: “Hice que Chan-

telle leyera una de las instrucciones y explicara cómo escribir la fórmula para la hoja de cálculo y rellenar las que faltaban". Al principio del período de investigación no hubiera podido pedirle que lo hiciera.

Chantelle progresó de manera significativa, pasó de tener una actitud negativa y desinteresada al comienzo del proyecto a ser voluntariosa y dispuesta a completar trabajos de alto nivel. Progresó de ser una estudiante informal a una con la que podía contar para contribuir de manera significativa en un debate de clase.

La participación de un alumno en el discurso permite que otros también participen. Algunos alumnos son capaces de tomar iniciativas en una comunidad de discurso. El objetivo del profesor es incluir a todo el mundo en las conversaciones de aprendizaje, pero es necesario comenzar en algún lugar. "Las interacciones no deberían considerarse como ventanas de la mente, sino como contribuciones discursivas que pueden tirar de otros para que aumente su participación oral/reflexiva en sus zonas de desarrollo proximal" (LERMAN, 2001, pág. 89).

Collete

Collete había permitido que otros alumnos se incorporaran en el discurso. Parecía más preparada que sus compañeros para arriesgar una opinión o una afirmación, y estas afirmaciones incentivaban la participación de los demás. Collete fue capaz de interaccionar conmigo, su profesora, de manera que permitió que otros cooperaran en sus zonas de desarrollo próximo donde la participación creciente y el aprendizaje pudieron tener lugar.

Algunos alumnos están menos preparados que otros para formar parte de la comunidad. Algunos alumnos no pueden participar en una comunidad discursiva de la misma

manera que el resto de la clase. No son excluidos de la comunidad, pero tampoco participan plenamente como otros miembros de la clase. La literatura sobre las comunidades de discurso matemático explica esta falta de participación de dos maneras. Los alumnos han tenido motivos históricos que explican por qué han desarrollado una identidad inconformista como resultado del modo en que se ha desarrollado la comunidad. "Como consecuencia, el inconformismo no es sólo una característica de la forma en que un sujeto puede reaccionar como consecuencia de su propios objetivos en una práctica o una red previa de experiencias, sino de la propia práctica" (LERMAN, 2001, pág. 100). Otra explicación es que la comunicación ha fallado con estos alumnos, o bien que han fracasado en comprender la comunicación de otros o que el fracaso era una función de la comunidad en sí (ZACK y GRAVES, 2001, págs. 263-265).

Shaun

Shaun se veía a sí mismo como un inconformista. Era "uno de esos colegas" y actuaba de una forma espontánea en la clase, sin escuchar a otros ni pensar en su contribución. Shaun carecía de las destrezas sociales para participar en la comunidad de discurso. Necesitaría un apoyo especial para entender las demandas de la comunidad, escuchar a otros y usar su comprensión para desarrollar su propio conocimiento.

Características claves de una comunidad de discurso

Las clases que constituyen comunidades de discurso manifiestan las siguientes características:

Todos los miembros de la comunidad tienen la oportunidad de contribuir al discurso. Una comunidad de discurso se

desarrolla en la medida en que cada miembro articula sus ideas y comparte lo que sabe o ha descubierto. Los alumnos son apoyados para aprender matemáticas al permitir que participen lo más plenamente posible en la comunidad. Por tanto, cada voz se valora por su contribución al discurso.

La comunidad elabora y comparte definiciones, y desarrolla conocimiento. El discurso de la comunidad permite que se elaboren significados para las palabras y frases utilizadas. Estos significados se comparten, por lo que cada miembro aprende a conocer la red de ideas y conceptos interconectados que están asociados con las palabras y frases usadas en la comunidad. El profesor también comparte estos significados y toma medidas para disipar dudas o corregir un mal encauzamiento.

La comunidad goza de un ambiente de confianza y respeto. Todo el mundo asume una responsabilidad apropiada para el aprendizaje. Una faceta importante de la comunidad de discurso es que los miembros escuchan con atención y se responden unos a otros. Cuando el modelo de un profesor se manifiesta de esta manera e incentiva a los alumnos a hacer lo mismo, ayuda a desarrollar un ambiente apropiado. En la medida en que los alumnos comienzan a sentirse parte de una comunidad de la clase, también empiezan a asumir la responsabilidad de las acciones que tienen lugar en ella. El locus de control cambia, los alumnos van tomando el control a medida que dedican tiempo a las actividades y comienzan a entender que deben actuar como profesores cuando están preparados para ello.

La comunidad está relacionada con las identidades de sus miembros. Mientras los alumnos están cada vez más capacitados para tomar parte en el discurso de la comunidad, cambia su percepción sobre ellos mismos. La habilidad que desarrollan los alumnos para expresar sus ideas matemáticas les conduce a considerarse alguien que ha aprendido matemáticas y puede aprender más.

Cambiar la práctica

Los cambios en la práctica ocurren cuando los profesores comprenden que existen diferentes ideas o maneras de proceder en la clase que pueden mejorar la forma de aprender de los alumnos, son capaces de adoptar esas ideas, y tienen el tiempo, la motivación y el apoyo necesario para averiguar las consecuencias de esos cambios en cuanto a las prácticas. En primer lugar, defiendo el término “práctica teorizada”, que describe y explica cómo los profesionales se comprometen con las ideas o con la teoría y las hacen propias. Después exploro cómo se puede apoyar a los profesores de manera que puedan realizar cambios sustanciales.

Práctica teorizada

Práctica teorizada es el nombre que doy a los cambios en la práctica como resultado de profesionales que usan la teoría para guiar los cambios en su propia práctica y a continuación desarrollan dicha teoría. Tales cambios implican cambiar las creencias del profesor sobre lo que es una “buena” enseñanza”, y por tanto dar la posibilidad de que sean prolongados. La práctica profesional cambiante exige bases teóricas. Las teorías vigentes en la práctica profesional a menudo derivan de un entendimiento tácito (ARYGIS y SCHÖN, 1974, TORFF, 1999). Muchos profesionales no advierten las fuentes de su conocimiento profesional y son incapaces de dar una descripción sencilla de ello (ALTRICHTER y cols., 1993). Sin embargo, en la medida en que los profesores comienzan a mejorar su práctica empiezan a aplicar la teoría que guía esos cambios y forma parte de la compleja interacción entre la teoría y la acción: la teoría que conduce a cambios en la práctica y la práctica ejemplifica y expande la teoría. Es en esta interacción cuando la teoría tiene el potencial de ser personalizada como un sistema de creencias, y por tanto sostie-

ne cambios duraderos en la práctica. Los resultados de esta interacción dialéctica entre la teoría y la práctica lo denomino "práctica teorizada".

La síntesis de la teoría y la práctica que llamo práctica teorizada es más que un proceso de pensamiento reflexivo crítico (SCHÖN, 1983) y se refleja mejor en el concepto de *praxis*.

> En la praxis, el pensamiento y la acción (o teoría y práctica) están dialécticamente relacionados. Deben entenderse como mutuamente constitutivas de un proceso de interacción que es una continua reconstrucción del pensamiento y la acción en el proceso histórico vivo que se muestra en todas las situaciones sociales reales. Ni el pensamiento ni la acción son algo preeminente... En la praxis las ideas que guían a la acción están sujetas al cambio al igual que la acción, el único elemento fijo es la phrónesis, la disposición a actuar de manera auténtica y correcta.
>
> (CARR y KEMMIS, 1986, pág. 34.)

La práctica teorizada requiere una estrecha relación entre el pensamiento y la acción, en la que uno reconstruye al otro. La preeminencia del pensamiento o la acción cambia durante el proceso; al principio el pensamiento puede tener prioridad, ya que estudiar la teoría o la práctica de otros modifica el pensamiento sobre la enseñanza, pero a medida que procede el proceso de cambio, la acción toma el relevo en la clase. Los cambios en la manera en que los profesores toman decisiones repentinas o responden a las percepciones de sus alumnos son el resultado de haber integrado la teoría. Los cambios en la manera en que los alumnos responden a las actividades planificadas modifica la percepción que los profesores tienen de la enseñanza.

Implicarse en la teoría explicada en este libro puede cambiar las creencias de los profesores sobre cómo actuar en una clase, al exigir que sus alumnos se involucren en el trabajo y hablen libremente acerca de sus conceptos matemáticos. Éstas se convierten en acciones teorizadas, aunque los

detalles cambiarán para adaptarse a la situación y al tema. Estas acciones teorizadas son prácticas teorizadas, en las que el pensamiento y la acción son mutuamente constitutivas, pero también distintas y expresables, al menos en parte. La práctica teorizada engloba todas las complejidades, indisciplina y desorden de la práctica, junto con el reconocimiento de que la teoría puede y debería ser parte de la práctica, aunque nunca podrá explicarla del todo. Los profesionales usan la práctica para entender la teoría, y usan la teoría para que la práctica tenga sentido.

Cambio sostenible

Los profesores advierten de muchas maneras que el ejercicio de su profesión debe cambiar, pero si pretenden que esos cambios sean duraderos, deben tener en cuenta ciertos factores. El cambio sostenido tiene que ser el resultado del cambio en el sistema de creencias de los profesores a través de los procesos de práctica teorizada. Ocurre cuando el profesorado cuenta con lo siguiente:

1. *Pruebas fiables.* El factor de motivación más fuerte para el cambio son las pruebas fiables de que los cambios defendidos mostrarán una diferencia respecto a los logros de los alumnos. Los profesores se encuentran bajo una gran presión por el trabajo que desempeñan y no harán cambios a menos que estén seguros de que conducirán a un incremento en el aprendizaje de sus alumnos.
2. *Ideas prácticas.* Un elemento importante al hacer cambios son las estrategias prácticas que se pueden aplicar de forma inmediata. Inevitablemente, al principio éstas son utilizadas a veces de manera algo mecánica por algunos profesores y el cambio ocurre despacio, pero el éxito de estos puntos de partida

sencillos les dan seguridad para adaptarlos y modificarlos y, posteriormente, generar sus propias ideas. Para algunos profesores, el proceso de la práctica teorizada comienza con la teoría, pero para la mayoría se inicia con la práctica, al comprobar cómo funcionan las ideas y al reflexionar sobre el motivo por el que trabajan y cómo se pueden obtener resultados aún mejores.

3. *Apoyo.* El apoyo del trabajo como parte de la comunidad de aprendizaje profesional es, si no esencial, al menos muy deseable si las ideas deben integrarse en el ejercicio de los profesores. Los docentes valoran la motivación de una "comunidad de individuos de pensamiento similar" al inicio del proceso de implicación y al proveer estructura a la revisión de los cambios. Los grupos de investigación acción que se han formado en algunas escuelas o como parte de un Instituto de Educación Superior proveen motivación, apoyo y estructura en la medida en que los profesores procuran cambiar su práctica.
4. *Reflexiones acerca de la acción.* El apoyo de los compañeros en la escuela o en cualquier otro lugar favorece tanto la reflexión inmediata sobre la acción como la reflexión más profunda que aporta nuevos matices y perspectivas. Compartir la información y las respuestas entre compañeros provee un entorno de apoyo para una reflexión prolongada sobre la acción.
5. *Tiempo.* Modificar el pensamiento de los profesores lleva mucho tiempo. El proyecto KMOFAP (BLACK y cols., 2003), muestra que pese a que el pensamiento de los docentes había sido influenciado claramente por lo que habían aprendido sobre la investigación y las estrategias asociadas, llevó mucho tiempo integrar estas nuevas ideas en su práctica. En enero de 2000 —casi un año después de poner en marcha el proyecto— sólo se pudieron observar cambios

modestos en la clase, por lo que hubiera sido tentador en aquel momento concluir que se necesitaba algo diferente. Sin embargo, unos meses más tarde, las cosas parecieron "encajar en su sitio" para muchos profesores, y se pudieron ver cambios radicales en la práctica de clase.

Es muy difícil para los docentes encontrar tiempo para hablar y pensar sobre los cambios en el ejercicio de su profesión. Salvo que el cambio esté específicamente destinado para ese propósito, por lo general las demás exigencias de la vida escolar obstaculizan el camino. Por supuesto, algunos sí encuentran tiempo, y la práctica se explora y los cambios se producen. Aún así, las escuelas que desean apoyar a sus profesores para que desarrollen su enseñanza y las prácticas de aprendizaje, deberían reservar un tiempo específico para esta importante labor.

6. *Flexibilidad.* Gran parte de los entornos de desarrollo profesional del profesorado tienden a "imponer a los profesores su cometido". Sin embargo, salvo que reciban un apoyo flexible al integrar nuevas ideas en su práctica, cualquier cambio que se produzca tenderá a ser menor y temporal. Los profesores se encuentran en la difícil situación de tener que mantener el éxito que obtienen con sus viejas estrategias al mismo tiempo que desarrollan nuevas prácticas. Los docentes que pueden decidir qué planteamientos probar y qué ritmo seguirán, conservan el dominio del proceso y esto es crucial para el éxito.

¿El final o el principio?

Las matemáticas confieren poder; las personas que saben utilizarlas toman el control de aspectos de su vida que no pueden alcanzar quienes no son capaces de "hacer" mate-

máticas. Este libro trata de las diferentes maneras en que los estudiantes se pueden ver como "alguien que puede hacer" matemáticas. Gran parte de esto es ser capaz de hablar sobre ideas matemáticas. Los alumnos que pueden hablar sobre ideas matemáticas usando el registro matemático, saben que pueden poner en práctica las ideas matemáticas. Evalúan su aprendizaje de un modo preciso porque pueden expresar lo bien que han aprendido las ideas hasta entonces y usar esta evaluación para guiar aprendizajes futuros. Los que son capaces de hablar sobre las ideas matemáticas piensan más en estas ideas y su aprendizaje es más seguro y accesible. Comprenden las conexiones y vínculos entre las diferentes áreas de matemáticas.

Hablar sobre las ideas matemáticas también afecta a la autoestima de los alumnos. Cuando adquieren mayor habilidad para emplear el lenguaje matemático y las formas de expresión, se llegan a ver como matemáticos, personas que pueden usar las ideas y los conceptos matemáticos de forma efectiva para encontrar respuestas y resolver problemas. También se consideran estudiantes competentes porque parte del proceso de hablar sobre matemáticas es probar sus ideas: compartir, comparar y reformular conceptos hasta observar que su percepción concuerda con el objetivo de aprendizaje. Los alumnos saben lo *que* han aprendido y comienzan a desarrollar una visión profunda sobre *cómo* lo han aprendido. Llegan a pensar en ellos mismos como estudiantes prósperos en matemáticas.

Este libro habrá conseguido su objetivo si ha ayudado a los profesores a pensar sobre lo importante que es para los alumnos hablar y pensar más en la clase de matemáticas. Realizar cualquier cambio es un viaje arriesgado, y esta es la razón por la que he incluido ideas sobre cómo apoyar a los profesores para llevar a cabo dicho cambio. Es importante asegurar el compromiso, pero el cambio sostenido llega con el pensamiento, la reflexión y la revisión de la práctica. No es imposible hacer cambios de forma aislada, pero el apoyo de

personas de ideas semejantes, ya sea en la escuela o en la comunidad académica más amplia, puede proporcionar la motivación para continuar durante la fase de “incompetencia consciente”, cuando los profesores y sus alumnos se muestran confusos y desalentados por todas las modificaciones que se realizan.

Las ideas de este libro proporcionan un punto de partida para un viaje hacia la práctica, en la que alumnos y profesores trabajan juntos para permitir que el aprendizaje tenga lugar al desarrollar el discurso matemático en la comunidad de la clase. Los detalles particulares de lo que esto significa en una escuela en particular, y con una determinada clase, se han de trabajar en cada fase del viaje por los miembros de la comunidad. Los principios de los Capítulos II y VI y las consideraciones prácticas de los Capítulos III, IV y V se aúnan para guiar el viaje, pero el proceso debe hacerse con seriedad y compromiso. El éxito no será inmediato; tomará tiempo tanto para el profesor como para los alumnos acostumbrarse a sus diferentes papeles en la clase; el del profesor, gestionar el aprendizaje en lugar de dirigir o dictar, y el de los alumnos, pensar y expresar sus pensamientos y asumir la responsabilidad de su aprendizaje.

En una clase en la que se habla y se aprende, es decir, una comunidad de discurso, los alumnos toman conciencia de que pueden usar y dominar las ideas matemáticas, y de que pueden ser matemáticos. Por tanto, trabajar con ellos de manera que les permita pensar y expresar sus ideas matemáticas les confiere poder, y la certeza de saber usar las matemáticas para encontrar las respuestas a los problemas con que se enfrentan. Descubren que pueden “hacer” matemáticas.

Bibliografía

AAIA (2003). *Self-assessment.* Pag. web de AAIA, Association for Achievement and Improvement through Assessment, www.aaia.org.uk.

ADLER, J. (1998). "Lights and limits: recontextualising Lave and Wenger to theorizeknowledge of teaching and learning of school mathematics". En *Situated Cognition and the Learning of Mathematics,* editado por A. WATSON. Oxford: University of Oxford Department of Educational Studies.

— (2000). "Social practice theory and mathematics teacher education". *Nordic Studies in Mathematics Education* 8(3).

ALTRICHTER, H. y POSCH, P. (1989). "Does the 'Grounded Theory' approach offer a guiding paradigm for teacher research?" *Cambridge Journal of Education* 19(1): págs. 21-31.

—; POSCH, P. y SOMEKH, B. (1993). *Teachers Investigate their Work: an introduction to the methods of action research.* Londres: Routledge.

ARGYRIS, C. y SCHÖN, D. (1974). *Theory in Practice.* San Francisco: Jossey-Bass.

ATKIN, J. M. (1992). "Teaching as research: an essay". *Teaching and Teacher Education* 8(4): págs. 381-390.

BARNES, D. (1992). "The role of talk in learning". En *Thinking Voices,* editado por K. NORMAN. Londres: Hodder & Stoughton.

BLACK, P. y WILIAM, D. (1998a). "Assessment and classroom learning". *Assessment in Education* 5(1): págs. 7-74.

BLACK, P. y WILIAM, D. (1998b). *Inside the Black Box.* Londres: Kings College.

—; HARRISON, C.; LEE, C.; MARSHALL, B. y WILIAM, D. (2002). *Working Inside the Black Box – Assessment for Learning in the Classroom.* Londres: NfER.

—; HARRISON, C.; LEE, C.; MARSHALL, B. y WILIAM, D. (2003). *Assessment for Learning – Putting it into Practice.* Buckingham: Open University Press.

BRUNER, J. (1996). *The Culture of Education.* Cambridge, MA: Harvard University Press. (Trad. cast.: *La educación, puerta de la cultura.* Madrid. Visor, 1997.)

BUTLER, R. (1988). “Enhancing and undermining intrinsic motivation: the effects of task-involving and ego-involving evaluation on interest and performance”. *British Journal of Educational Psychology* 58: págs. 1-14.

CARR, W. y KEMMIS, S. (1986). *Becoming Critical. Education, Knowledge and Action Research.* Lewes: Falmer Press. (Trad. cast.: *Teoría crítica de la enseñanza. La investigación-acción en la formación del profesorado.* Barcelona. Martínez Roca, 1988.)

CAZDEN, C. (1986). “Classroom discourse”. En *Handbook of Research on Teaching,* editado por M. WITTROCK. Nueva York: Macmillan. (Trad. cast.: “El discurso del aula”. En M. C. WITTROCK (Comp.). *La investigación de la enseñanza. Vol. III. Profesores y Alumnos.* Barcelona. Paidós-Ministerio de Educación y Ciencia, 1990, págs. 627-709.)

CLARKE, S. (2005). *Formative Assessment in the Secondary Classroom.* Londres: Hodder Arnold.

COBB, P. (1988). “The tension between theories of learning and instruction”. *Educational Psyhologist* 23(2): págs. 87-103.

—; YACKEL, E. y WOOD, T. (1992). “Interaction and learning in mathematics classroom situations”. *Educational Studies in Mathematics* 23(1): págs. 99-122.

COCKCROFT, W. H. (1982). *Mathematics Counts.* Londres: HM Stationery Office. (Trad. cast.: *Las matemátias sí cuentan. Informe Cockcroft.* Madrid. Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado, Ministerio de Educación y Ciencia, 1985.)

DANIELS, H. (2001). *Vygotsky and Pedagogy.* Londres: Routledge Falmer. (Trad. cast.: *Vygotsky y la pedagogía.* Barcelona. Paidós, 2003.)

DES/WO (1988). *Mathematics for Ages 5 to 16.* Londres: HMSO.
DEWEY, J. (1938). *Logic: The Theory of Inquiry.* Nueva York: Henry Holt. (Trad. cast.: *Lógica: teoría de la investigación.* México. Fondo de Cultura Económica, 1950.)
DfES (1989). *Mathematics in the National Curriculum.* Londres.
DURKIN, K. y SHIRE, B. (1991). *Language in Mathematical Education Research and Practice.* Buckingham: Open University Press.
DWECK, C. (2000). *Self Theories: their role in motivation, personality and development.* Lillington, NC: Psychology Press, Taylor & Francis.
ELLIOTT, J. (1987). "Educational theory, practical philosophy and action research". *British Journal of Educational Studies* 35(2): págs. 149-169. (Trad. cast.: "Teoría educativa, filosofía práctica e investigación-acción" en J. ELLIOTT. *La Investigación-Acción en educación.* Madrid. Morata, 2005, 5ª ed., págs. 105-123.)
— (1991). *Action Research for Educational Change.* Milton Keynes: Open University Press. (Trad. cast.: *El cambio educativo desde la investigación-acción.* Madrid. Morata, 2000, 3ª ed.)
ERVYNCK, G. (1992). "Mathematics as a foreignlanguage". Documento leído en PME, at DURHAM NH.
EVANS, J. y TSATSARONI, A. (1994). "Language and subjectivity in hte mathematics classroom". *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom,* editado por S. LERMAN. Netherlands: Kluwer.
FULLAN, M. G. (1991). *The New Meaning of Educational Change.* Londres: Cassell Educational Ltd. (Trad. cast.: *Los nuevos significados del cambio en la educación.* Barcelona. Octaedro, 2002.)
GERGEN, K. J. (1995). "Social construction and the education process". En *Constructivism in Education,* editado por L. P. STEFFE y J. GALE. Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associates.
GRIFFITHS, M. (1990). "Action research: grass roots practice or management tool?" En *Staff Development in Schools: an action research approach,* editado por P. LOMAX. Clevedon: Multi-lingual Matters.
HALLIDAY, M. A. K. (1975). "Some aspects of sociolinguistics". En *Interactions between Linguistics and Mathematical Education.* Copenhague: UNESCO.
— y MARTIN, J. R. (1993). *Writing Science: Literacy and Discursive Power.* Londres: Falmer Press.
HARDCASTLE, L. (1993). "Do they know what we are talking about?" *Mathematics in School* 22 (Mayo).

HARGREAVES, A. (1998). *International Handbook of Educational Change.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

HATCH, G. y SHIU, C. (1998). "Practitioner research and the construction of knowledge in mathematics education". En *Mathematics as a Research Domain: a search for identity,* editado por A. SIERPINSKA y J. KILPATRICK: Kluwer Academic Publishers.

HOLLAND, D.; SKINNER, D.; LACHICOTTE, W. y CAIN, C. (1998). *Identity and Agency in Cultural Words.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

JAWORSKI, B. (1994). *Investigating Mathematics Teaching.* Londres: Falmer Press.

KLUGER, A. N. y DENISI, A. (1996). "The effects of feedback interventions on performance: a historical review, a meta-analysis, and a preliminary feedback intervention theory". *Psychological Bulletin* 119: págs. 254-284.

LABORDE, C. (1990). "Language and mathematics". En *Mathematics and Cognition,* editado por P. NESHER y J. KILPATRICK. Cambridge: Cambridge University Press.

LAMPERT, M. (1988). *The Teacher's Role in Reinventing the Meaning of Mathematical Knowing inthe Classroom.* Michigan: The Institute for Research on Teaching, Michigan State University.

LAVE, J. y WENGER, E. (1991). *Situated Learning: legitimate peripheral participation.* Cambridge: Cambridge University Press.

LEE, C. S. (2004). *The Role of Language in the Learning of Mathematics.* DPhil, Educational Studies, Oxford.

LERMAN, S. (2000). "Some problems of socio-cultural research in mathematics teaching and learning". *Nordic Studies in Mathematics Education* 8(3): págs. 55-71.

— (2001). "Cultural, discursive psychology: a sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics". *Educational Studies in Mathematics* 46: págs. 87-113.

MASON, J. (2002). *Researching your own Practice, the Discipline of Noticing.* Londres: Routledge Falmer.

MCNAIR, R. (2001). "Working in the mathematics frame: maximizing the potential to learn from students' mathematics classroom discussions". *Educational Studies in Mathematics* 2000(42): págs. 197-209.

MERCER, N. (1995). *The Guided Construction of Knowledge.* Cleve-

don: Multilingual Matters Ltd. (Trad. cast.: *La construcción guiada de conocimiento: el habla de profesores y alumnos.* Barcelona. Paidós, 1997.)

MERCER, N. (2000). *Words & Minds.* Londres: Routledge. (Trad. cast.: *Palabras y mentes: cómo usamos el lenguaje para pensar juntos.* Barcelona. Paidós, 2001.)

MORGAN, C. (1995). "An analysis of the discourse of written reports of investigate work in GCSE mathematics". Tesis doctoral, Institute of Education, University of London, Londres.

— (1998). *Writing Mathematically.* Londres: Falmer Press.

— (1999). "Convention or necessity? The impersonal in mathematical writing". Documento leído en la British Society for Research into Learning Mathematics, Coventry.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

— (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

OTTERBURN, M. K. y NICHOLSON, A. R. (1976). "The Language of (CSE) mathematics". *Mathematics in School* 5(5): págs. 18-20.

PERRENOUD, P. (1991). "Towards a pragmatic approach to formative evaluation". In *Assessment of Pupils' Achievement: Motivation and School Success,* editado por P. WESTON. Amsterdam: Swets and Zeitlinger.

PIMM, D. (1987). *Speaking Mathematically.* Londres: Routledge & Kegan Paul. (Trad. cast.: *El lenguaje matemático en el aula.* Madrid. Morata-M.E.C., 2003, 3ª ed.)

— (1991). "Communicating mathematically". En *Language in Mathematical Education,* editado por K. DURKIN y B. SHIRE. Buckingham: Open University Press.

— (1995). *Symbols and Meanings in School Mathematics.* Londres: Routledge.

— (1996a). "Diverse communications". En *Communication in Mathematics K-12 and beyond,* editado por P. C. ELLIOTT . Reston, VA: NCTM.

— (1996b). "Plenary address to PME Conference". Documento leído en la 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, en Valencia, España.

POTARI, D. y JAWORSKI, B. (2002). "Tackling complexity in mathematics teaching development: using the teaching triad as a tool for

reflection and analysis". *Journal of Mathematics Teacher Education* 5: págs. 351-380.

RUSSELL, S. J. y CORWIN, R. B. (1991). "Talking mathematics: 'going slow' and 'letting to'". Documento leído en la 13th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Blacksburg.

SADLER, A. J. y THORNING, D. W. S. (1987). *Understanding Pure Mathematics.* Oxford: Oxford University Press.

SADLER, R. (1989). "Formative assessment and the design of instructional systems". *Instructional Science* 18: págs. 119-144.

SCHÖN, D. A. (1983). *The Reflective Practitioner.* Aldershot: Avebury. (Trad. cast.: *El profesional reflexivo: cómo piensan los profesionales cuando actúan.* Barcelona. Paidós, 1998.)

— (1991). *Educating the Reflective Practitioner.* Aldershot: Avebury. (Trad. cast.: *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones.* Barcelona. Paidós-M.E.C., 1992.)

SFARD, A. (2000). "Steering (is)course between metaphor and rigour: using focal analysis to investigate the emergence of mathematical objects". *Journal for Research in Mathematical Education* 31(3): págs. 296-327.

— (2001). "There is more to discourse than meets the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning". *Educational Studies in Mathematics* 46: págs. 13-57.

SHERIN, M. G. (2002). "A balancing act: developing a discourse community in a mathematics classroom". *Journal of Mathematics Teacher Education* 5(3): págs. 205-233.

SHUARD, H. y ROTHERY, A. (1984). *Children Reading Mathematics.* Londres: John Murray Ltd.

SILVER, E. A. y SMITH, M. S. (1996). "Building discourse communities in mathematics classrooms". En *Communication in Mathematics K-12 and Beyond,* editado por P. C. ELLIOT. Reston, VA: NCTM.

STENHOUSE, L. (1980). "Site lecture", at Simon Fraser University, Vancouver.

TAPSON, F. (1997). "Watch your mathematical language!" *Mathematics in School* 26(1).

TORFF, B. (1999). "Tacit Knowledge in Teaching: folk pedagogy and teacher education". En *Tacit Knowledge in Professional Practi-*

ce, editado por R. J. STERNBERG y J. A. HORVATH. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

TUNSTALL, P. y GIPPS, C. (1996). “Teacher feedback to young children in formative assessment: a typology”. *British Educational Research Journal* 22(4): págs. 389-404.

USISKIN, Z. (1996). “Mathematics as a language”. En *Communication in Mathematics K-12 and beyond,* editado por P. C. ELLIOT. Reston, VA: NCTM.

VAN OERS, B. (2001). “Educational forms of initiation in mathematical culture”. *Educational Studies in Mathematics* 46: págs. 59-85.

VON GLASERFELD, E. (1984). “An introduction to radical constructivism”. En *The Invented Reality,* editado por P. WATZLAWICK. Londres: W. W. Norton & Co.

— (1987). “Learning as a constructive activity”. En *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics,* editado por C. JANVIER. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

VYGOTSKY, L. S. (1962). *Thought and Language.* Cambridge, MA: MIT Press New York. (Trad. cast.: *Pensamiento y lenguaje.* Buenos Aires. La Pléyade, 1977; Barcelona. Paidós, 1995, 3ª ed.)

— (1978). *Mind in Society.* Cambridge, MA: Harvard University Press. (Trad. cast.: *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona. Crítica, 1995, 3ª ed.)

— (1981). “The genesis of higher mental functions”. En *The Concept of Activity in Soviet Psychology,* editado por J. W. WERTSCH. Armonk, NY: M. E. Sharpe. (Trad. cast.: “La génesis de las funciones psíquicas superiores” en L. VYGOTSKY (1995). *Obras escogidas.* Vol. 3. Madrid. Visor, págs. 139-168.)

WALKERDINE, V. (1997). “Redefining the subjects in situated cognition theory”. En *Situated Cognition: Social Semiotic and Psychological Perspectives,* editado por K. D. y J. WHITSON. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

WENGER, E. (1999). *Communities of Practice.* Cambridge: Cambridge University Press. (Trad. cast.: *Comunidades de prácticas: aprendizaje, significado e identidad.* Barcelona. Paidós, 2001.)

WERTSCH, J. V. (1985). *Vygotsky and the Social Formation of Mind.* Cambridge, MA: Harvard University Press. (Trad. cast.: *Vygotsky y la formación social de la mente.* Barcelona. Paidós, 1995, 2ª ed.)

WERTSCH, J. V. y TOMA, C. (1995). "Discourse and learning in the classroom: a sociocultural approach". En *Constructivism in Education,* editado por L. P. STEFFE y J. GALE. Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associates.

WHITEHEAD, J. (1989). "Creating a living theory from questions of the kind, 'How do I improve my practice?'" *Cambridge Journal of Education* 19(1): págs. 41-52.

WOOD, T. y YACKEL, E. R. (1990). "The development of collaborative dialogue within a small group interaction". En *Transforming children's Mathematical Education: International Perspectives,* editado por L. P. STEFFE y T. WOODS. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

—; COBB, P. y YACKEL, E. (1995). "Reflections on learning and teaching mathematics in elementary school". En *Constructivism in Education,* editado por L. P. STEFFE y J. GALE. Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associates.

ZACK, V. y GRAVES, B. (2001). "Making mathematical meaning through dialogue: 'Once you think of it, the Z minus three seems pretty weird". *Educational Studies in Mathematics* 46, págs. 229-271.

Índice de Autores y Materias